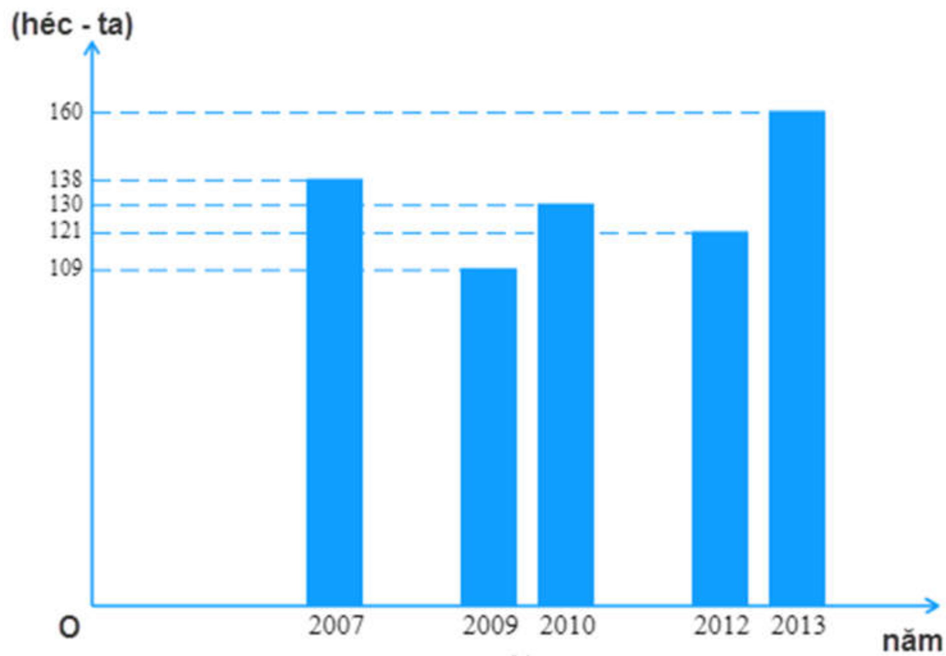
ĐỀ SỐ 1. ÔN THI ĐGNL ĐHQG HÀ NỘI 2021-2022

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

A. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (35 CÂU)

Câu 1. Người ta thống kê diện tích trồng lúa của một địa phương trong các năm tính theo héc-ta rồi biểu diễn thành biểu đồ ở trên.



Diện tích trồng lúa ít nhất trong các năm là bao nhiêu (héc - ta)?

A. 160. **B.** 138 **C.** 121. **D.** 109

Câu 2. Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc $a\left(m/s\right)$ thì phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với phương trình vận tốc $v\left(t\right)=-5t+a\left(m/s\right)$. Biết rằng từ lúc phanh đến khi xe dừng hẳn ô tô đi được $40m$. Tính vận tốc xe khi chưa phanh?

A. $a=80m/s$. **B.** $a=20m/s$. **C.** $a=25m/s$. **D.** $a=40m/s$.

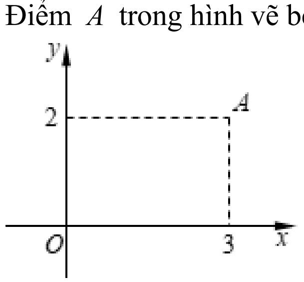
Câu 3. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x-1\right)<3$ là:

A. $S=\left(-\infty;9\right)$ **B.** $S=\left(1;9\right)$ **C.** $S=\left(1;10\right)$ **D.** $S=\left(-\infty;10\right)$

Câu 4. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2-3xy+y^2+2x+3y-6=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $\left(3;3\right)$. **B.** $\left(2;1\right),\left(3;3\right)$. **C.** Vô nghiệm. **D.** $\left(2;1\right)$.

Câu 5. Điểm A trong hình vẽ bên biểu diễn cho số phức z.



Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$.

A. Phần thực là 3 và phần ảo là -2. **B.** Phần thực là -3 và phần ảo là 2.

C. Phần thực là 3 và phần ảo là $-2i$. **D.** Phần thực là -3 và phần ảo là $2i$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $(Q): 2y+3z-11=0$ **B.** $(Q): 2x+3z-11=0$

C. $(Q): 2y+3z-12=0$ **D.** $(Q): 2y+3z-10=0$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-1;1)$, $B(4;2;-3)$. Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxy) và B' là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (Oyz). Độ dài đoạn thẳng $A'B'$ bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 8. Tam thức bậc hai $f(x)=-x^2+3x-2$ nhận giá trị không âm khi và chỉ khi

A. $x\in[1;2]$. **B.** $x\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

C. $x\in(1;2)$. **D.** $x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)\sin 2x=m+1$ vô nghiệm.

A. $m\in\left(\frac{1}{2};2\right)\cup(2;+\infty)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

C. $m\in\left[\frac{1}{2};2\right]$. **D.** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

Câu 10. Ông A gửi 120 triệu đồng tiền vào ngân hàng với lãi suất $6\%/$ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau 10 năm, tổng số tiền mà ông A nhận được là bao nhiêu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và ông A không rút tiền ra? (Lấy kết quả gần đúng đến hàng phần trăm)

A. $214,90$ triệu đồng. **B.** $224,10$ triệu đồng.

C. $234,90$ triệu đồng. **D.** $215,10$ triệu đồng.

Câu 11. Nguyên hàm $\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$ bằng.

A. $\ln\left|x-\frac{1}{x^2}\right|+C$. **B.** $\ln\left|x-\frac{1}{x}\right|+C$. **C.** $\ln\left|x+\frac{1}{x}\right|+C$. **D.** $\ln\left|x^2-\frac{1}{x}\right|+C$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x)>2e^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m<f(1)-2e$. **B.** $m>f(1)-e$. **C.** $m\le f(1)-2e$. **D.** $m>f(-1)-2e$.

Câu 13. Một xe ô tô đang chạy với vận tốc $20\,\text{m/s}$ thì người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật nên đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc là $v(t)=-2t+20$, trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ lúc đạp phanh. Quãng đường mà ô tô đi được trong 15 giây cuối cùng bằng

A. $75\,\text{m}$. **B.** $200\,\text{m}$. **C.** $100\,\text{m}$. **D.** $125\,\text{m}$.

Câu 14. Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học A nhưng vì do không đủ nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm vay 3.000.000 đồng để nộp học phí với lãi suất 3% /năm. Sau khi tốt nghiệp đại học bạn Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất $0,25\%/$ tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là:

A. 309604 đồng. **B.** 232518 đồng. **C.** 232289 đồng. **D.** 215456 đồng.

Câu 15. Phương trình $\log_3(x+1)=2$ có nghiệm là:

A. $x=8$. **B.** $x=10$. **C.** $x=7$. **D.** $x=5$.

Câu 16. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=e^{-x}$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành là.

A. $\pi(\frac{e^2}{2}-\frac{e^{-2}}{2}+1)$. **B.** $\pi(\frac{e^2}{2}+\frac{e^{-2}}{2}-1)$.

C. $\pi(\frac{e^2}{2}+\frac{e^{-2}}{2}+1)$. **D.** $\pi(\frac{e^2}{2}-\frac{e^{-2}}{2}-1)$.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+x^2+mx+1$ đồng biến trên $(-\infty;\ +\infty)$.

A. $m\ge\frac{1}{3}$. **B.** $m\ge\frac{4}{3}$. **C.** $m\le\frac{4}{3}$. **D.** $m\le\frac{1}{3}$.

Câu 18. Tìm số phức z thỏa mãn $iz+2\overline{z}=9+3i$.

A. $z=5+i$. **B.** $z=5-i$. **C.** $z=1-5i$. **D.** $z=1+5i$.

Câu 19. Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-i|=|\overline{z}+3|$ trong mặt phẳng Oxy là:

A. Đường thẳng $\Delta: x+y+4=0$. **B.** Đường thẳng $\Delta: 3x+y+4=0$.

C. Đường thẳng $\Delta: x+y-4=0$. **D.** Đường thẳng $\Delta: 3x-y+4=0$.

Câu 20. Tìm tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng sau đây:

$\Delta_1:\begin{cases}x=-3+4t\\y=2+5t\end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=1+4t'\\y=7-5t'\end{cases}$

A. (1; –3). **B.** (5; 1). **C.** (1; 7). **D.** (–3; 2).

Câu 21. Cho phương trình $x^2+y^2-2x+2my+10=0$ (1). Có bao nhiêu số nguyên $m\in(0;10)$ để (1) là phương trình của đường tròn?

A. 8. **B.** không có. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 22. Trong không gian cho điểm $M(1;-3;2)$.Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A,B,C mà $OA=OB=OC\ne0$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 23. Một khối nón có đường sinh bằng $2a$ và diện tích xung quanh của mặt nón bằng πa^2. Tính thể tích của khối nón đã cho?

A. $V=\frac{\pi a^3\sqrt{15}}{8}$. **B.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{15}}{12}$. **C.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{15}}{24}$. **D.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{7}}{24}$.

Câu 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có O và O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi V_1 là thể tích khối nón tròn xoay có đỉnh là trung điểm của OO' và đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$; V_2 là thể tích khối trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 25. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $AA'=b$ và AA' tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $\frac{3}{4}a^2b$. **B.** $\frac{3}{8}a^2b$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2b$. **D.** $\frac{1}{8}a^2b$.

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB=2MC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. MG song song (ACB). **B.** MG song song (BCD).

C. MG song song (ACD). **D.** MG song song (ABD).

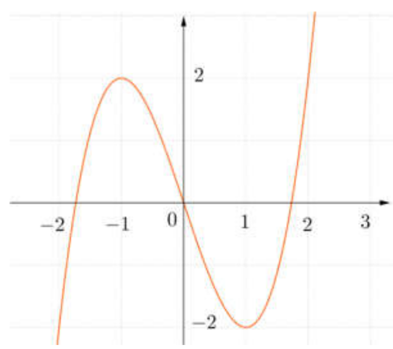
Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;2)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-1;3)$ và điểm M thuộc mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=1$. Nếu biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì độ dài đoạn AM bằng

A. 6. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 2.

Câu 28. Cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trên (α) sao cho mọi điểm của d cách đều 2 điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right)$ trên $(0;+\infty)$.



A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất. Khi đó:

A. $a+b+c=8$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=6$. **D.** $a+b+c=7$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+2020$, số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 32. Để phương trình sau có nghiệm duy nhất $|2x^2-3x-2|=5a-8x-x^2$, giá trị của tham số a là

A. $a=15$. **B.** $a=-12$. **C.** $a=-\dfrac{49}{60}$. **D.** $a=-\dfrac{57}{80}$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x\le 0\\ \sin x+1 & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$.

Tính $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f^2(x)+f(-2x)\sin x\right)dx$

A. $I=\dfrac{3\pi}{4}-1$. **B.** $I=\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{2}{3}$ **C.** $I=\dfrac{3\pi}{4}+2$ **D.** $I=\dfrac{3\pi}{4}-2$

Câu 34. Một bình đựng 8 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để có được ít nhất hai viên bi xanh là bao nhiêu?

A. $\dfrac{28}{55}$. **B.** $\dfrac{41}{55}$. **C.** $\dfrac{14}{55}$. **D.** $\dfrac{42}{55}$.

Câu 35. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 2. Gọi M,N và P lần lượt là trung điểm của $A'B'$; $B'C'$ và $C'A'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

B. ĐIỀN KHUYẾT (15 CÂU)

Câu 36. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x^2-6x-11$ tại giao điểm của đồ thị với trục tung.

Đáp án: ....

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x^2-2)(x^4-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là?

Đáp án: ....

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho $(P):2x+2y-z+3=0$ và điểm $M(1;-2;-1)$, khi đó khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng:

Đáp án: ....

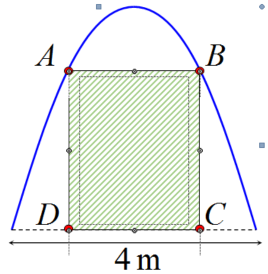
Câu 39. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người,gồm 12 nam và 3 nữ.Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và một nữ?

Đáp án: ....

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2f(x)-16}-4}{x^2+x-6}$ bằng

Đáp án: ....

Câu 41. Trong đợt hội trại "Khi tôi 18" được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB=2m, AD=3m$ $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp và pano được đặt sao cho cạnh CD tiếp xúc với mặt đất. Hỏi vị trí cao nhất của pano so với mặt đất là bao nhiêu?

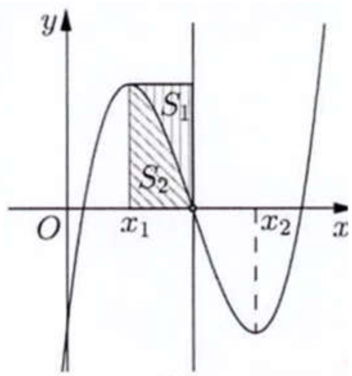


Đáp án: ....

Câu 42. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 - \left(m^2 - 4\right)x^2 + 3$ có 1 cực trị. Số phần tử của tập S là

Đáp án: ....

Câu 43. Cho hình vẽ bên dưới biết $y = f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc 3 và phần gạch chéo là diện tích S_1, S_2.



Cho biết $f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) = 0$ và $x_2 = x_1 + 4$. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

Đáp án: ....

Câu 44. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right) = 2$ là

Đáp án: ....

Câu 45. Xét các số phức z thỏa mãn $(2 - z)(\overline{z} + i)$ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là:

Đáp án: ....

Câu 46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AM và $A'C'$

Đáp án: ....

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(2;0;-2\right), B\left(3;-1;-4\right), C\left(-2;2;0\right)$. Điểm D trong mặt phẳng $\left(Oyz\right)$ có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ bằng 1. Khi đó có tọa độ điểm D thỏa mãn bài toán là

Đáp án: ....

Câu 48. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}}^2\left(a^2\right) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$.

Đáp án: ....

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$, $AB = 10a$, $BC = 14a$, $AC = 6a$. Gọi M là trung điểm AC, N là điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AN = \frac{3}{5}AB$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CN.

Đáp án: ....

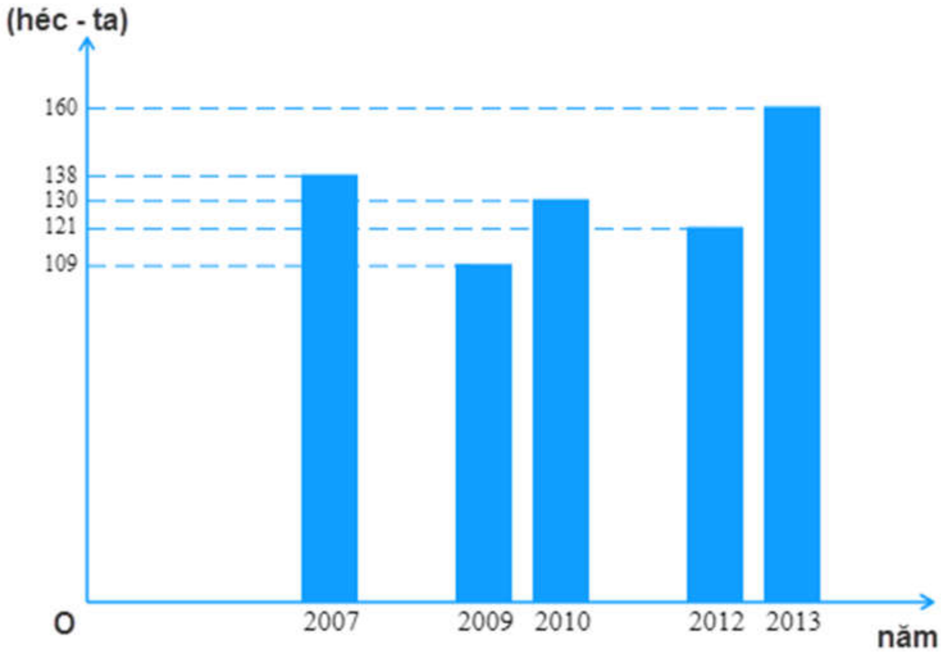
Câu 50. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh bên bằng 2. Gọi α là góc giữa cạnh bên của hình chóp và mặt đáy. Tính $\sin\alpha$ để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất?

Đáp án: ....

Lời giải tham khảo

A. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (35 CÂU)

Câu 1. Người ta thống kê diện tích trồng lúa của một địa phương trong các năm tính theo héc-ta rồi biểu diễn thành biểu đồ ở trên.



Diện tích trồng lúa ít nhất trong các năm là bao nhiêu (héc - ta)?

A. 160. **B.**138 **C.** 121. **D.**109

Lời giải

Chọn D

Câu 2. Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc $a(m/s)$ thì phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với phương trình vận tốc $v(t) = -5t + a(m/s)$. Biết rằng từ lúc phanh đến khi xe dừng hẳn ô tô đi được $40m$. Tính vận tốc xe khi chưa phanh?

A. $a = 80m/s$. **B.** $a = 20m/s$. **C.** $a = 25m/s$. **D.** $a = 40m/s$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-5t + a = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{a}{5}$

$$S = 40 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{a}{5}} v(t)\,dt = 40 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{a}{5}} (-5t + a)\,dt = 40 \Leftrightarrow \left.\left(\frac{-5t^2}{2} + at\right)\right|_0^{\frac{a}{5}} = 40$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5\dfrac{a^2}{25}}{2} + \frac{a^2}{5} = 40 \Leftrightarrow \frac{-a^2}{10} + \frac{a^2}{5} = 40 \Leftrightarrow \frac{a^2}{10} = 40 \Leftrightarrow a^2 = 400 \Leftrightarrow a = 20.$$

Câu 3. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) < 3$ là:

A. $S = (-\infty; 9)$ **B.** $S = (1; 9)$ **C.** $S = (1; 10)$ **D.** $S = (-\infty; 10)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2(x-1) < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 < 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 9 \end{cases}$.

Câu 4. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $(3;3)$. **B.** $(2;1),(3;3)$. **C.** Vô nghiệm. **D.** $(2;1)$.

Lời giải

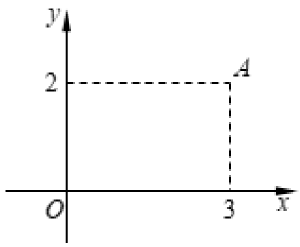
Chọn B

Ta có : $y=2x-3 \Rightarrow x^2-3x(2x-3)+(2x-3)^2+2x+3(2x-3)-6=0$

$\Rightarrow -x^2+5x-6=0 \Rightarrow x=2; x=3$

$x=2 \Rightarrow y=1$, $x=3 \Rightarrow y=3$

Câu 5. Điểm A trong hình vẽ bên biểu diễn cho số phức z.



Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$.

A. Phần thực là 3 và phần ảo là -2.

B. Phần thực là -3 và phần ảo là 2.

C. Phần thực là 3 và phần ảo là $-2i$.

D. Phần thực là -3 và phần ảo là $2i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=3+2i \Rightarrow \overline{z}=3-2i$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $(Q): 2y+3z-11=0$ **B.** $(Q): 2x+3z-11=0$

C. $(Q): 2y+3z-12=0$ **D.** $(Q): 2y+3z-10=0$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$, (P) có vtpt $\vec{n}=(1;-3;2)$. (Q) có vtpt $\vec{k}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}\right]=4(0;2;3)$.

$\Rightarrow (Q): 2y+3z-11=0$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-1;1)$, $B(4;2;-3)$. Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxy) và B' là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (Oyz). Độ dài đoạn thẳng $A'B'$ bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Do A' là hình chiếu vuông góc của $A(3;-1;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) nên $A'(3;-1;0)$.

Do B' là hình chiếu vuông góc của $B(4;2;-3)$ trên mặt phẳng (Oyz) nên $B'(0;2;-3)$

Ta có $\overrightarrow{A'B'}=\left(-3;3;-3\right)$ $\Rightarrow\left|\overrightarrow{A'B'}\right|=\sqrt{\left(-3\right)^2+3^2+\left(-3\right)^2}=3\sqrt{3}$.

Câu 8. Tam thức bậc hai $f\left(x\right)=-x^2+3x-2$ nhận giá trị không âm khi và chỉ khi

A. $x\in\left[1;2\right]$. **B.** $x\in\left(-\infty;1\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

C. $x\in\left(1;2\right)$. **D.** $x\in\left(-\infty;1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(x\right)\ge 0\Leftrightarrow -x^2+3x-2\ge 0\Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left(m-2\right)\sin 2x=m+1$ vô nghiệm.

A. $m\in\left(\frac{1}{2};2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

C. $m\in\left[\frac{1}{2};2\right]$. **D.** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

TH1. Với $m=2$, phương trình $\left(m-2\right)\sin 2x=m+1\Leftrightarrow 0=3$: vô lý.

Suy ra $m=2$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

TH2. Với $m\ne 2$, phương trình $\left(m-2\right)\sin 2x=m+1\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{m+1}{m-2}$.

Để phương trình $\left(*\right)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{m+1}{m-2}\notin\left[-1;1\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{m+1}{m-2}>1\\ \frac{m+1}{m-2}<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\ \frac{1}{2}<m<2\end{array}\right.$.

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m>\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 10. Ông A gửi 120 triệu đồng tiền vào ngân hàng với lãi suất 6%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau 10 năm, tổng số tiền mà ông A nhận được là bao nhiêu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và ông A không rút tiền ra? (Lấy kết quả gần đúng đến hàng phần trăm)

A. $214,90$ triệu đồng. **B.** $224,10$ triệu đồng.

C. $234,90$ triệu đồng. **D.** $215,10$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a=120$ triệu đồng.

Đặt T_n là số tiền nhận được sau n năm.

Sau 1 năm số tiền có được (cả gốc và lãi) là $T_1=a+a.6\%=a\left(1+0,06\right)$.

Sau 2 năm số tiền có được là $T_2=a\left(1+0,06\right)^2$.

Gọi T là tổng tiền mà A nhận được sau 10 năm.

$T=a\left(1+0,06\right)^{10}=120.1.06^{10}=214,90$.

Câu 11. Nguyên hàm $\int\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}$ bằng.

A. $\ln\left|x-\dfrac{1}{x^2}\right|+C$. **B.** $\ln\left|x-\dfrac{1}{x}\right|+C$. **C.** $\ln\left|x+\dfrac{1}{x}\right|+C$. **D.** $\ln\left|x^2-\dfrac{1}{x}\right|+C$.

Lời giải

Chọn C

$$\int\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}dx=\int\frac{x^2+1-2}{x\left(x^2+1\right)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=-\ln|x|+\ln\left(x^2+1\right)+C=\ln\left|x+\frac{1}{x}\right|+C.$$

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x)>2e^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m<f(1)-2e$. **B.** $m>f(1)-e$. **C.** $m\le f(1)-2e$. **D.** $m>f(-1)-2e$.

Lời giải

Chọn C

- Ta có $f(x)>2e^x+m,\ \forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow f(x)-2e^x>m,\ \forall x\in(-1;1)$ (*)
- Đặt $g(x)=f(x)-2e^x$. Khi đó, $g'(x)=f'(x)-2e^x$.
- Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ suy ra $f'(x)<0,\ \forall x\in(-1;1)$
- Suy ra $g'(x)=f'(x)-2e^x<0,\ \forall x\in(-1;1)$.
- Do đó, (*) $\Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]} g(x)\ge m\Leftrightarrow m\le g(1)\Leftrightarrow m\le f(1)-2e$.

Câu 13. Một xe ô tô đang chạy với vận tốc $20\,\text{m/s}$ thì người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật nên đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc là $v(t)=-2t+20$, trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ lúc đạp phanh. Quãng đường mà ô tô đi được trong 15 giây cuối cùng bằng

A. $75\,\text{m}$. **B.** $200\,\text{m}$. **C.** $100\,\text{m}$. **D.** $125\,\text{m}$.

Lời giải

Chọn B

Từ khi người lái xe đạp phanh đến lúc xe dừng hẳn thì $v(t)=0\Leftrightarrow -2t+20=0\Leftrightarrow t=10$.

Do đó quãng đường ô tô đi được trong 15 giây cuối cùng là

$$s=20.5+\int_0^{10}(-2t+20)\,dt=200\,\text{m}.$$

Câu 14. Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học A nhưng vì do không đủ nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm vay 3.000.000 đồng để nộp học phí với lãi suất 3% /năm. Sau khi tốt nghiệp đại học bạn Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất $0,25\%/$ tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là:

A. 309604 đồng. **B.** 232518 đồng. **C.** 232289 đồng. **D.** 215456 đồng.

Lời giải

Chọn C

Vậy sau 4 năm bạn Hùng nợ ngân hàng số tiền là:

$$s=3000000\left[\left(1+3\%\right)^4+\left(1+3\%\right)^3+\left(1+3\%\right)^2+\left(1+3\%\right)\right]=12927407,43.$$

Lúc này ta coi như bạn Hùng nợ ngân hàng khoản tiền ban đầu là $12.927.407,43$ đồng, số tiền này bắt đầu được tính lãi và được trả góp trong 5 năm.

Ta có công thức:

$$\Rightarrow \mathrm{T}=\frac{N\left(1+r\right)^n.r}{\left(1+r\right)^n-1}=\frac{12927407,4\left(1+0,0025\right)^{60}.0,0025}{\left(1+0,0025\right)^{60}-1}\approx 232289.$$

Câu 15. Phương trình $\log_3\left(x+1\right)=2$ có nghiệm là:

A. $x=8$. **B.** $x=10$. **C.** $x=7$. **D.** $x=5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_3\left(x+1\right)=2\Leftrightarrow x+1=9\Leftrightarrow x=8$.

Câu 16. Cho hình phẳng A giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=e^{-x}$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình A quanh trục hoành là.

A. $\pi(\frac{e^2}{2}-\frac{e^{-2}}{2}+1)$. **B.** $\pi(\frac{e^2}{2}+\frac{e^{-2}}{2}-1)$.

C. $\pi(\frac{e^2}{2}+\frac{e^{-2}}{2}+1)$. **D.** $\pi(\frac{e^2}{2}-\frac{e^{-2}}{2}-1)$.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm của $y=e^x$ và $y=e^{-x}$ là $x=0$..

$$V=\pi\left|\int_0^1(e^{2x}-e^{-2x})dx\right|=\pi\left|(\frac{e^{2x}}{2}+\frac{e^{-2x}}{2})\Big|_0^1\right|=\pi(\frac{e^2}{2}+\frac{e^{-2}}{2}-1).$$

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+x^2+mx+1$ đồng biến trên $\left(-\infty;\ +\infty\right)$.

A. $m\ge\frac{1}{3}$. **B.** $m\ge\frac{4}{3}$. **C.** $m\le\frac{4}{3}$. **D.** $m\le\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2+2x+m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(-\infty;\ +\infty\right)\Leftrightarrow y'\ge 0;\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta'=1-3m\le 0\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{3}$.

Câu 18. Tìm số phức z thỏa mãn $iz+2\overline{z}=9+3i$.

A. $z=5+i$. **B.** $z=5-i$. **C.** $z=1-5i$. **D.** $z=1+5i$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=a+bi\quad(a;b\in\mathbb{R})$. Suy ra: $\overline{z}=a-bi.$

Ta có:

$iz + 2\overline{z} = 9 + 3i \Leftrightarrow i(a+bi) + 2(a-bi) = 9 + 3i$

$\Leftrightarrow (2a-b) + (a-2b)i = 9 + 3i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=9 \\ a-2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$.

Vậy $z = 5 + i$.

Câu 19. Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-i| = |\overline{z}+3|$ trong mặt phẳng Oxy là:

A. Đường thẳng $\Delta: x+y+4=0$.
B. Đường thẳng $\Delta: 3x+y+4=0$.
C. Đường thẳng $\Delta: x+y-4=0$.
D. Đường thẳng $\Delta: 3x-y+4=0$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$ với x, $y \in \mathbb{R}$. Khi đó điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z.

Ta có $|z-i| = |\overline{z}+3| \Leftrightarrow |x+yi-i| = |x-yi+3|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+3)^2+y^2} \Leftrightarrow 6x+2y+8=0 \Leftrightarrow 3x+2y+4=0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $\Delta: 3x+y+4=0$.

Câu 20. Tìm tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng sau đây:

$\Delta_1: \begin{cases} x=-3+4t \\ y=2+5t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=1+4t' \\ y=7-5t' \end{cases}$

A. (1; –3).
B. (5; 1).
C. (1; 7).
D. (–3; 2).

Lời giải

Chọn C

Xét hệ: $\begin{cases} -3+4t=1+4t' \\ 2+5t=7-5t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t'=0 \end{cases} \Rightarrow$ giao điểm $A(1;7)$.

Câu 21. Cho phương trình $x^2+y^2-2x+2my+10=0$ (1). Có bao nhiêu số nguyên $m \in (0;10)$ để (1) là phương trình của đường tròn?

A. 8.
B. không có.
C. 6.
D. 7.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện để (1) là phương trình đường tròn: $1^2+(-m)^2-10>0 \Leftrightarrow m^2>9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<-3 \end{array}\right.$.

Như vậy trong khoảng $(0;10)$ có 6 giá trị nguyên của m là $\{4;5;6;7;8;9\}$.

Câu 22. Trong không gian cho điểm $M(1;-3;2)$ .Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A,B,C mà $OA=OB=OC\neq 0$

A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 1.

Lời giải

Chọn B

Giả sử mặt phẳng (α) cần tìm cắt Ox,Oy,Oz lần lượt tại $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0c)(a,b,c\neq 0)$

$(\alpha): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$; (α) qua $M(1;-3;2)$ nên: $(\alpha): \frac{1}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=1(*)$

$$OA = OB = OC \neq 0 \Rightarrow |a| = |b| = |c| \neq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = c(1) \\ a = b = -c(2) \\ a = -b = c(3) \\ a = -b = -c(4) \end{array}\right.$$

Thay (1) vào (*) ta có phương trình vô nghiệm

Thay $(2),(3),(4)$ vào (*) ta được tương ứng $a = -4, a = 6, a = \frac{-3}{4}$

Vậy có 3 mặt phẳng.

Câu 23. Một khối nón có đường sinh bằng $2a$ và diện tích xung quanh của mặt nón bằng πa^2. Tính thể tích của khối nón đã cho?

A. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{15}}{8}$. **B.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{15}}{12}$. **C.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{15}}{24}$. **D.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{7}}{24}$.

Lời giải

Chọn C

$S_{xq} = \pi rl = \pi a^2 \Rightarrow r = \frac{\pi a^2}{\pi l} = \frac{\pi a^2}{\pi .2a} = \frac{a}{2}$.

$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3}\pi.\frac{a^2}{4}.\frac{a\sqrt{15}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{15}}{24}$.

Câu 24. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có O và O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi V_1 là thể tích khối nón tròn xoay có đỉnh là trung điểm của OO' và đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$; V_2 là thể tích khối trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Gọi hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khi đó

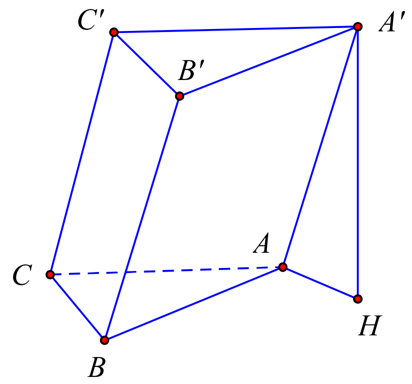
Ta có $V_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{a}{2} = \frac{\pi a^3}{12}$; $V_2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.a = \frac{\pi a^3}{4}$ suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$.

Câu 25. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $AA' = b$ và AA' tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $\frac{3}{4}a^2b$. **B.** $\frac{3}{8}a^2b$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2b$. **D.** $\frac{1}{8}a^2b$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $A'H \perp (ABC)$ tại H

Suy ra góc giữa AA' và đáy bằng $\widehat{A'AH} = 60°$

$\Rightarrow \sin 60° = \dfrac{A'H}{A'A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = \dfrac{\sqrt{3}}{2}A'A = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{2}a^2\sin 60° = \dfrac{3a^2b}{8}$.

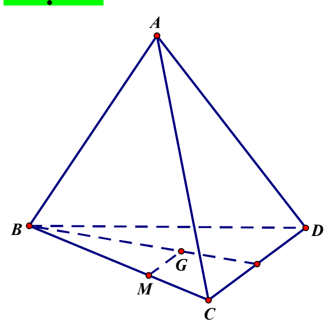
Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. MG song song (ACB). **B.** MG song song (BCD).

C. MG song song (ACD). **D.** MG song song (ABD).

Lời giải

Chọn C



Vì $MG//CD$ nên $MG//(ACD)$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;2)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-1;3)$ và điểm M thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Nếu biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì độ dài đoạn AM bằng

A. 6. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 2.

Lời giải

Có $\overrightarrow{AB} = (-2;-1;2); \overrightarrow{AC} = (-1;-2;1)$ nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Suy ra $G(0;0;3)$. Nhận thấy G nằm ngoài mặt cầu.

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MG đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là giao điểm của đoạn IG và mặt cầu, với $I(0;0;1)$ là tâm của mặt cầu.

Đường thẳng IG nhận $\overrightarrow{IG}(0;0;2)$ là VTCP nên có phương trình là $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1+2t \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng IG và mặt cầu là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1+2t \\ x^2+y^2+(z-1)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Với $M(0;0;0)$ thì $MG=3$;

Với $M(0;0;2)$ thì $MG=1$;

Do đó MG đạt giá trị nhỏ nhất với $M(0;0;2)$. Khi đó $AM=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2+(2-2)^2}=\sqrt{2}$

Câu 28. Cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trên (α) sao cho mọi điểm của d cách đều 2 điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Mọi điểm trên d cách đều hai điểm A,B nên d nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

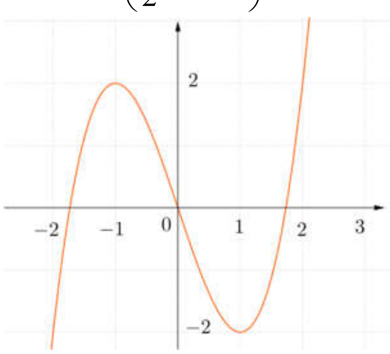
Có $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;0)$ và trung điểm AB là $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};1\right)$ nên mặt phẳng trung trực của AB là:

$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)-\left(y-\frac{5}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 3x+y-7=0$.

Mặt khác $d\subset(\alpha)$ nên d là giao tuyến của hai mặt phẳng: $\begin{cases} 3x+y-7=0 \\ x+y+z-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-3x \\ z=2x \end{cases}$.

Vậy phương trình $d: \begin{cases} x=t \\ y=7-3t\ (t\in\mathbb{R}) \\ z=2t \end{cases}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right)$ trên $(0;+\infty)$.

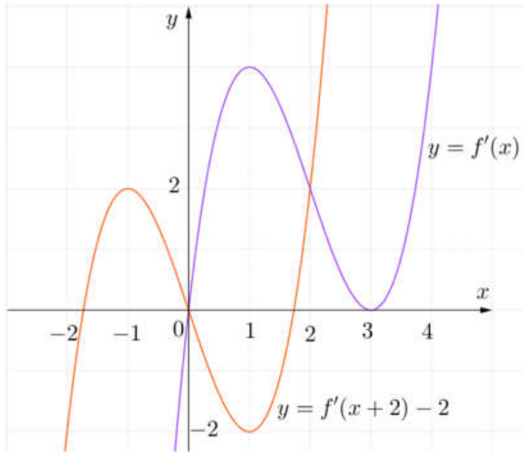


A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x+2)-2$, tịnh tiến lên trên 2 đơn vị rồi tịnh tiến sang phải 2 đơn vị, ta được đồ thị của hàm $y=f'(x)$ như sau



Ta có $g'(x)=(3x-3)f'\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-3=0\\ f'\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \frac{3}{2}x^2-3x=0\\ \frac{3}{2}x^2-3x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\\ x=0\\ x=1+\sqrt{3}\\ x=1-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Ta thấy đây đều là các nghiệm đơn, do đó hàm số $y=g(x)$ có 5 điểm cực trị.

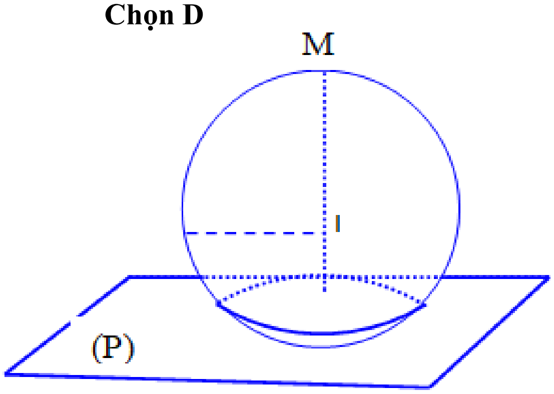
Vậy hàm số $g(x)=f\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right)$ có 3 điểm cực trị trên $(0;+\infty)$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất. Khi đó:

A. $a+b+c=8$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=6$. **D.** $a+b+c=7$.

Lời giải

Chọn D



Mặt (S) cầu có tâm $I(1;2;3),R=3$.

$d\left(I,(P)\right)=\dfrac{\left|2.1-2.2+3+3\right|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{4}{3}<R$ mặt phẳng cắt mặt cầu theo một đường tròn

Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất. Khi M thuộc đường thẳng Δ vuông đi qua M và vuông góc với (P)

$\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=2-2t\\z=3+t\end{cases}$. Thay vào mặt cầu $(S)\Rightarrow(2t)^2+(-2t)^2+(t)^2=9\Rightarrow 9t^2=9\Rightarrow t=\pm1$

Với $t=1\Rightarrow M(3;0;4)\Rightarrow d\left(M;(P)\right)=\dfrac{\left|2.3-2.0+4+3\right|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{10}{3}$

Với $t=-1\Rightarrow M(-1;4;2)\Rightarrow d\left(M;(P)\right)=\dfrac{\left|2.(-1)-2.4+2+3\right|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\dfrac{1}{3}$

Vậy $M(3;0;4)\Rightarrow a+b+c=7$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3-x^2+2020$, số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chon B

□Phương pháp

$y=f(|x|)\Rightarrow y'=\dfrac{x}{|x|}.f'(|x|)$ nên ta có nhận xét sau:

-Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=0$

-Số điểm cực trị dương của hàm số $y=f(x)$ là n thì số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là $2n+1$

□Ta có $f'(x)=x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Hàm số $y=f(x)$ có một cực trị dương nên hàm số $y=f(|x|)$ có ba cực trị.

Câu 32. Để phương trình sau có nghiệm duy nhất $\left|2x^2-3x-2\right|=5a-8x-x^2$, giá trị của tham số a là

A. $a=15$. **B.** $a=-12$. **C.** $a=-\dfrac{49}{60}$. **D.** $a=-\dfrac{57}{80}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình tương đương với $\left|2x^2-3x-2\right|+x^2+8x=5a$

Xét hàm số $y=f(x)=\left|2x^2-3x-2\right|+x^2+8x=\begin{cases}3x^2+5x-2 \text{ khi } x\le-\dfrac{1}{2}, x\ge2\\-x^2+11x+2 \text{ khi } -\dfrac{1}{2}<x<2\end{cases}$

Suy ra, bảng biến thiên của hàm $y=f(x)=\left|2x^2-3x-2\right|+x^2+8x$ như sau:

x	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{2}$		2	$\frac{11}{2}$
	$3x^2+5x-2$		$-x^2+11x+2$		$3x^2+5x-2$
y	$\searrow$ $-\frac{49}{12}$	$\nearrow$			$\nearrow$

Yêu cầu bài toán $5a=-\frac{49}{12} \Leftrightarrow a=-\frac{49}{60}$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x\le 0\\ \sin x+1 & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$.

Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f^2(x)+f(-2x)\sin x\right)dx$

A. $I=\frac{3\pi}{4}-1$. **B.** $I=\frac{3\pi}{4}+\frac{2}{3}$ **C.** $I=\frac{3\pi}{4}+2$ **D.** $I=\frac{3\pi}{4}-2$

Lời giải

+) Ta có: $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x+2\sin x+1\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}-\frac{\cos 2x}{2}+2\sin x\right)dx$

$=\frac{3\pi}{4}+2$

+) Ta có: $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(-2x)\sin x\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(-4x+1)\sin x\,dx=-3$

Vậy $I=I_1+I_2=\frac{3\pi}{4}-1$.

Câu 34. Một bình đựng 8 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để có được ít nhất hai viên bi xanh là bao nhiêu?

A. $\frac{28}{55}$. **B.** $\frac{41}{55}$. **C.** $\frac{14}{55}$. **D.** $\frac{42}{55}$.

Lời giải

Chọn D

Số trường hợp có thể là: $n(\Omega)=C_{12}^3=220$.

Gọi A là biến cố "Lấy được ít nhất 2 viên bi xanh"

TH1: Lấy được 2 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ có: $C_8^2.C_4^1=112$ (Cách).

TH2: Lấy được 3 viên bi xanh có: $C_8^3=56$ (Cách).

Suy ra: $n(A)=112+56=168$ (Cách).

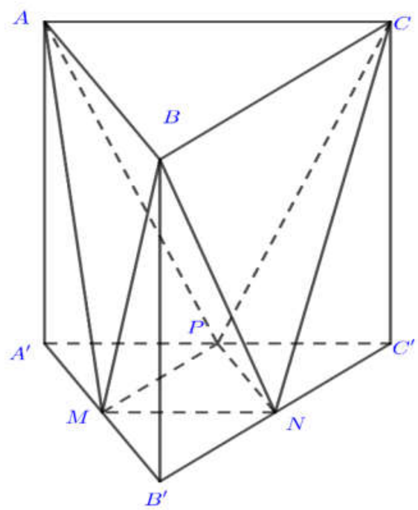
Vậy xác suất để có được ít nhất hai viên bi xanh là: $P(A)=\frac{168}{220}=\frac{42}{55}$.

Câu 35. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 2. Gọi M,N và P lần lượt là trung điểm của $A'B'$; $B'C'$ và $C'A'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AA'.S_{\Delta A'B'C'} = 2.\frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$.

Gọi thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P là V_1.

Ta có $V_1 = V - V_{AA'MP} - V_{BB'MN} - V_{CC'NP}$.

$V_{AA'MP} = \frac{1}{3}AA'.S_{\Delta A'MP} = \frac{1}{3}.AA'.\frac{1}{4}S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{12}V$.

$V_{BB'MN} = \frac{1}{3}BB'.S_{\Delta B'MN} = \frac{1}{3}.BB'.\frac{1}{4}S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{12}V$.

$V_{CC'NP} = \frac{1}{3}CC'.S_{\Delta C'NP} = \frac{1}{3}.CC'.\frac{1}{4}S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{12}V$.

Vậy $V_1 = V - V_{AA'MP} - V_{BB'MN} - V_{CC'NP} = V - \frac{3}{12}V = \frac{3}{4}V = \frac{3}{4}.2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

B. ĐIỀN KHUYẾT (15 CÂU)

Câu 36. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 6x - 11$ tại giao điểm của đồ thị với trục tung.

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Đồ thị hàm số giao với trục tung tại điểm $A(0;-11)$

Xét $y' = -3x^2 + 6x - 6 \Rightarrow$ Hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(0) = -6$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -6(x-0) - 11$ hay $y = -6x - 11$.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2-2)(x^4-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là?

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2)(x^4-4) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2)^2(x^2+2) = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,\ y=f(1) \\ x=\sqrt{2},\ y=f\left(\sqrt{2}\right) \\ x=-\sqrt{2},\ y=f\left(-\sqrt{2}\right) \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y		$\searrow$	$f\left(-\sqrt{2}\right)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f\left(\sqrt{2}\right)$	$\nearrow$	

.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số chỉ có 1 cực trị.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho $(P): 2x+2y-z+3=0$ và điểm $M(1;-2;-1)$, khi đó khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng:

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Công thức cần nhớ: cho điểm $M\left(x_0; y_0; z_0\right)$ và mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$.

Thì ta có khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là: $d\left(M;(P)\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Vậy $d\left(M;(P)\right)=\dfrac{\left|2.1+2(-2)-(-1)+3\right|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{2}{3}$.

Câu 39. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người,gồm 12 nam và 3 nữ.Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và một nữ?

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Có C_{12}^4 cách phân công 4 nam về tỉnh thứ nhất

Với mỗi cách phân công trên thì có C_8^4 cách phân công 4 nam về tỉnh thứ hai và có C_4^4 cách phân công 4 nam còn lại về tỉnh thứ ba.

Khi phân công nam xong thì có $3!$ cách phân công ba nữ về ba tỉnh đó.

Vậy có tất cả $C_{12}^4.C_8^4.C_4^4.3!=4989600$ cách phân công.

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2f(x)-16}-4}{x^2+x-6}$ bằng

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

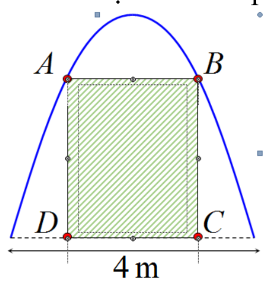
Lời giải

Từ giả thiết $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12 \Rightarrow f(2)=16$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2f(x)-16}-4}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2f(x)-16)-16}{(x^2+x-6)\left(\sqrt{2f(x)-16}+4\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(f(x)-16)}{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{2f(x)-16}+4\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)-16}{x-2}.\dfrac{2}{(x+3)\left(\sqrt{2f(x)-16}+4\right)}\right)=\dfrac{3}{5}$.

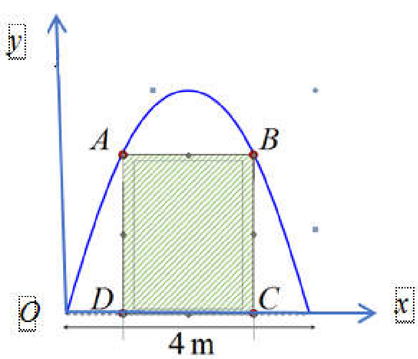
Câu 41. Trong đợt hội trại "Khi tôi 18" được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB=2m, AD=3m$ $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp và pano được đặt sao cho cạnh CD tiếp xúc với mặt đất. Hỏi vị trí cao nhất của pano so với mặt đất là bao nhiêu?



Đáp án: ....

Lời giải

Xây dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Bản chất của bài toán: *xác định tung độ đỉnh của parabol* $y=ax^2+bx+c$, *biết parabol đi qua các điểm* $O(0;0), A(1;3), B(3;3)$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a.0+b.0+c=0 \\ a.1+b.1+c=3 \\ a.9+b.3+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ parabol $y=-x^2+4x$ có đỉnh $I(2;4)$.

Vậy vị trí cao nhất của pano so với mặt đất là $4m$.

Câu 42. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4-(m^2-4)x^2+3$ có 1 cực trị. Số phần tử của tập S là

Đáp án: ....

Lời giải

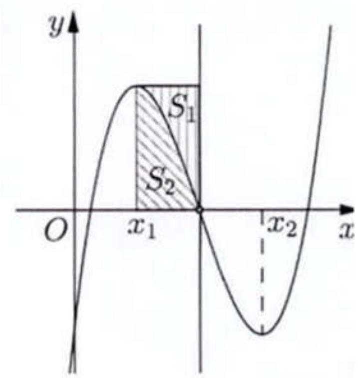
Ta có: $y'=4x^3-2(m^2-4)x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 2x(2x^2-m^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{m^2-4}{2} \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có 1 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$ $\Leftrightarrow x^2=\dfrac{m^2-4}{2}$ có nghiệm kép bằng 0 hoặc vô nghiệm

$\Leftrightarrow \dfrac{m^2-4}{2}\le 0 \Leftrightarrow m^2\le 4 \Leftrightarrow -2\le m\le 2$ mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow S=\{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy số phần tử của S là 5.

Câu 43. Cho hình vẽ bên dưới biết $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 và phần gạch chéo là diện tích S_1, S_2.



Cho biết $f(x_1)+f(x_2)=0$ và $x_2=x_1+4$. Tỷ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng

Đáp án: …………..

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=a(x-x_1)(x-x_1-4)=a(x-x_1)^2-4a(x-x_1)$ với $a>0$.

Suy ra $f(x)=\dfrac{a}{3}(x-x_1)^3-2a(x-x_1)^2+C$.

Từ đây ta tính được $f(x_1)=C$ và $f(x_2)=\dfrac{a}{3}(x_2-x_1)^3-2a(x_2-x_1)^2+C=-\dfrac{32}{3}a+C$

Do vậy $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{32a}{3}$, kết hợp với $f(x_1)+f(x_2)=0$, ta có: $f(x_1)=C=\dfrac{16a}{3}$.

Do đó, $f(x)=\dfrac{a}{3}\left[(x-x_1)^3-6(x-x_1)^2+16\right]$.

Ta có: $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{S_1}{(S_1+S_2)-S_1}=\dfrac{S_1}{2f(x_1)-S_1}=\dfrac{S_1}{\frac{32}{3}a-S_1}$.

Mà $S_1=\int\limits_{x_1}^{x_1+2} f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{a}{3}\int\limits_{x_1}^{x_1+2}\left[(x-x_1)^3-6(x-x_1)^2+16\right]\mathrm{d}x$, đổi biến $t=x-x_1$, ta được

$S_1=\dfrac{a}{3}\int\limits_0^2\left(t^2-6t+16\right)=\dfrac{20a}{3}$.

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{S_1}{\frac{32}{3}a-S_1}=\dfrac{\frac{20a}{3}}{\frac{32}{3}a-\frac{20a}{3}}=\dfrac{5}{3}$.

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2$ là

Đáp án: ....

Lời giải

Cách 1: Phương pháp ghép trục

Đặt $u=\cos x\in\left[-1;1\right]$

Vì $x\in\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ nên $u'=-\sin x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pi\\x=2\pi\\x=3\pi\\x=4\pi\end{array}\right.$

x	0				π				2π				3π				4π		$\dfrac{9\pi}{2}$
$u=\cos x$	1		0		-1		0		1		0		-1		0		1		0
$t=f(u)$	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0
$y=f(t)$			0				0				0				0				0 ; $y=2$

Từ bảng biến thiên suy ra tổng số nghiệm phương trình đã cho là 9.

Cách 2: Tự luận truyền thống

Từ bảng biến thiên ta suy ra: $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(\cos x\right)=-1\\f\left(\cos x\right)=1\end{array}\right.$

TH1: $f\left(\cos x\right)=-1$

Đặt $t=\cos x\,,t\in\left[-1;1\right]$

Khi đó phương trình $f\left(\cos x\right)=-1$ trở thành $f\left(t\right)=-1$, với $t\in\left[-1;1\right]$.

Đây là phương trình có hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ và đường thẳng $y=1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f\left(t\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a<-1\\t=b>1\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

TH2: $f\left(\cos x\right)=1$

Tương tự TH1: Đặt $t=\cos x$, $t\in\left[-1;1\right]$

$$f\left(t\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=m\in\left(-\infty;-1\right)\ \left(loại\right)\\t=n\in\left(-1;0\right)\\t=p\in\left(0;1\right)\\t=q\in\left(1;+\infty\right)\ \left(loại\right)\end{array}\right.$$

+ Với $t=n\in\left(-1;0\right)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình $\cos x=t$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$.

+ Với $t=p\in(0;1)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(0;1)$ thì phương trình $\cos x=t$ có 5 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$.

Hiển nhiên, 9 nghiệm trong những trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$.

Câu 45. Xét các số phức z thỏa mãn $(2-z)(\overline{z}+i)$ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là:

Đáp án: ………….

Lời giải

Gọi số phức $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow\overline{z}=x-yi.$

Thay vào điều kiện ta được:

$(2-z)(\overline{z}+i).$

$=(2-x-yi)(x-yi+i).$

$=\left[(2-x)-yi\right]\left[x+(1-y)i\right].$

$=(2-x)x+y(1-y)+\left[(2-x)(1-y)-xy\right]i.$

$(2-z)(\overline{z}+i)$ là số thuần ảo khi và chỉ khi:

$(2-x)x+y(1-y)=0.$

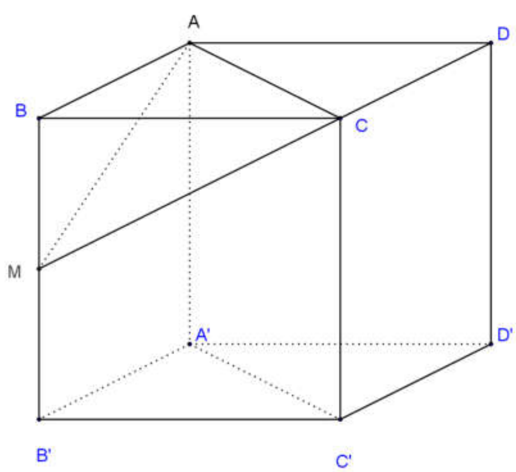
$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-y=0.$

Vậy số phức $z=x+yi$ thuộc đường tròn tâm $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AM và $A'C'$

Đáp án: ………….

Lời giải



+ Ta có $A'C'//AC$ nên góc giữa AM và $A'C'$ là góc giữa AC và AM.

+ Xét tam giác AMC có: $MA = MC = \sqrt{MB^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác AMC, ta có:

$$cos\left(AM, AC\right) = \left|\frac{AM^2 + AC^2 - MC^2}{2MA.AC}\right| = \frac{AC}{2MA} = \frac{a\sqrt{2}}{2.\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-2), B(3;-1;-4), C(-2;2;0)$. Điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1. Khi đó có tọa độ điểm D thỏa mãn bài toán là

Đáp án: ....

Lời giải

Vì $D \in (Oyz) \Rightarrow D(0;b;c)$, do cao độ âm nên $c < 0$.

Khoảng cách từ $D(0;b;c)$ đến mặt phẳng $(Oxy): z = 0$ bằng 1 $\Leftrightarrow \frac{|c|}{1} = 1 \Rightarrow c = -1$ (do $c < 0$).

Suy ra tọa độ $D(0;b;-1)$. Ta có:

$\overrightarrow{AB} = (1;-1;-2)$, $\overrightarrow{AC} = (-4;2;2)$; $\overrightarrow{AD} = (-2;b;1)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (2;6;-2)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = -4 + 6b - 2 = 6b - 6 = 6(b-1)$

$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = |b-1|$

Mà $V_{ABCD} = 2 \Leftrightarrow |b-1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 3 \\ b = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D(0;3;-1) \\ D(0;-1;-1) \end{array}\right.$. Chọn đáp án $D(0;3;-1)$..

Câu 48. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Ťm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$.

Đáp án: ....

Lời giải

Với điều kiện đề bài, ta có

$$P = \log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left[2\log_{\frac{a}{b}} a\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = 4\left[\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b}.b\right)\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$= 4\left[1 + \log_{\frac{a}{b}} b\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right).$$

Đặt $t = \log_{\frac{a}{b}} b > 0$ (vì $a > b > 1$), ta có $P = 4(1+t)^2 + \frac{3}{t} = 4t^2 + 8t + \frac{3}{t} + 4 = f(t)$.

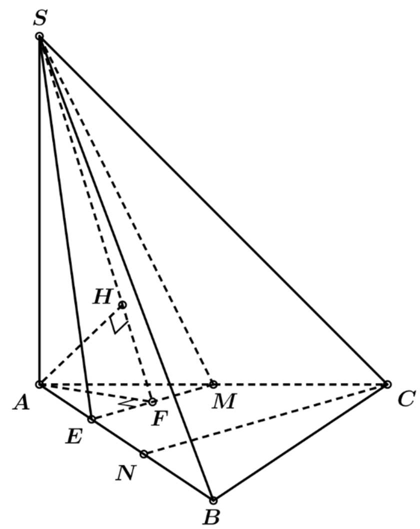
Ta có $f'(t) = 8t + 8 - \frac{3}{t^2} = \frac{8t^3 + 8t^2 - 3}{t^2} = \frac{(2t-1)\left(4t^2 + 6t + 3\right)}{t^2}$

Vậy $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Khảo sát hàm số, ta có $P_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 15$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SA=3a$, $AB=10a$, $BC=14a$, $AC=6a$. Gọi M là trung điểm AC, N là điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AN=\frac{3}{5}AB$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CN.

Đáp án: ……………

Lời giải



Ta có

+ $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot BC}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BAC}=120^o$.

+ $AN=\dfrac{3}{5}AB=6a$.

+ $AM=\dfrac{1}{2}AC=3a$.

Gọi E là trung điểm $AN\Rightarrow ME//NC$ (EM là đường trung bình của ΔANC).

$\begin{cases}NC//EM\\EM\subset(SEM)\end{cases}\Rightarrow NC//(SEM)$ mà $SM\subset(SEM)\Rightarrow d(CN,SM)=d(N,(SEM))$.

$AN\cap(SEM)=E\Rightarrow\dfrac{d(N,(SEM))}{d(A,(SEM))}=\dfrac{AE}{EN}=1\Rightarrow d(N,(SEM))=d(A,(SEM))$.

Gọi F là hình chiếu của A lên $EM\Rightarrow F$ là trung điểm của EM $(AE=AM=3a)$

Gọi H là hình chiếu của A lên $SF\Rightarrow d(A,(SEM))=AH$.

+ $AF=AE\cdot\cos\widehat{EAF}=\dfrac{3a}{2}$.

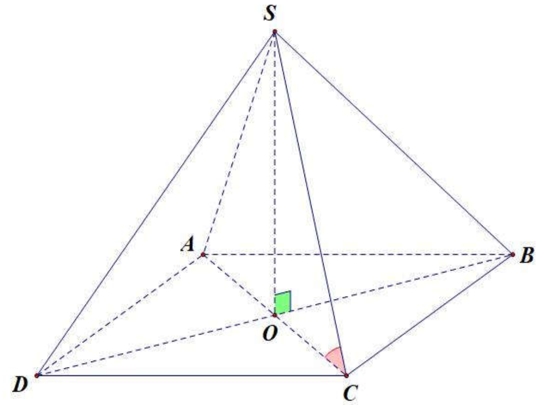
+ $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AF^2}\Rightarrow AH=\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(SM,CN)=\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 50. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh bên bằng 2. Gọi α là góc giữa cạnh bên của hình chóp và mặt đáy. Tính $\sin\alpha$ để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất?

Đáp án: ……………

Lời giải



Ta có $SC=1$

Do $\begin{cases} SO\perp (ABCD) \\ SC\cap (ABCD)=C \end{cases} \Rightarrow \left(SC;\left(ABCD\right)\right)=\widehat{SCO}=\alpha$.

Mà $OC=2.\cos\alpha$; $SO=2.\sin\alpha$; $AC=2OC=4.\cos\alpha$; $AB=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.\cos\alpha$.

Nên $S_{ABCD}=AB^2=8.\cos^2\alpha$.

Vì vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\dfrac{16}{3}.\sin\alpha.\cos^2\alpha=\dfrac{16}{3}.\sin\alpha.(1-\sin^2\alpha)$.

Xét hàm $y=\dfrac{16}{3}t(1-t^2)=\dfrac{16}{3}\left(-t^3+t\right)$ với $\begin{cases} t=\sin\alpha \\ 0<t<1 \end{cases}$

$y'=\dfrac{16}{3}\left(-3t^2+1\right)$; $y'=0\Leftrightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta tìm được $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ thì hàm số y đạt giá trị lớn nhất.

Như vậy $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ thể tích của khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất và $V_{\max}=y\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{32\sqrt{3}}{27}$.