ĐỀ SỐ 10. ÔN THI ĐGNL ĐHQG HÀ NỘI 2021-2022

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

A. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (35 CÂU)

Câu 1. Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20). Kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Số trung bình là:

A. $\overline{x}=15,20$ **B.** $\overline{x}=15,21$ **C.** $\overline{x}=15,23$ **D.** $\overline{x}=15,25$

Câu 2. Một chất điểm chuyển động trên trục Ox với vận tốc thay đổi theo thời gian $v(t)=3t^2-6t$ (m/s). Tính quãng đường chất điểm đó đi được từ thời điểm $t_1=0$ (s), $t_2=4$ (s).

A. 12. **B.** 16. **C.** 24. **D.** 8.

Câu 3. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x-2)\ge 2$.

A. $(2;+\infty)$. **B.** $[11;+\infty)$. **C.** $(11;+\infty)$. **D.** $(-\infty;11)$.

Câu 4. Hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3x=y^3-3y \\ x^6+y^6=27 \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 5. Mặt phẳng phức $A(-4;1), B(1;3), C(-6;0)$ lần lượt biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3. Trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $-3-\frac{4}{3}i$. **B.** $3-\frac{4}{3}i$. **C.** $3+\frac{4}{3}i$. **D.** $-3+\frac{4}{3}i$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(2;0;5)$, $C(0;-3;-1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC?

A. $x-y+2z+9=0$. **B.** $x-y+2z-9=0$.

C. $2x+3y-6z-19=0$. **D.** $2x+3y+6z-19=0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$,hình chiếu vuông góc của $A(1;3;5)$ trên mặt phẳng (Oyz) là điểm nào sau đây

A. $(1;0;0)$. **B.** $(1;3;0)$. **C.** $(1;0;5)$. **D.** $(0;3;5)$.

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x}{x-1}-\frac{3}{x+1}\le 0$ là

A. $S=(-\infty;1)$. **B.** $S=(-1;1)$.

C. $S=[-1;1]$. **D.** $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 9. Tìm số nghiệm thuộc $\left[\frac{-3\pi}{2};-\pi\right)$ của phương trình $\sqrt{3}\sin x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 10. Người ta trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác như sau: hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 câu,… Số hàng cây trong khu vườn là

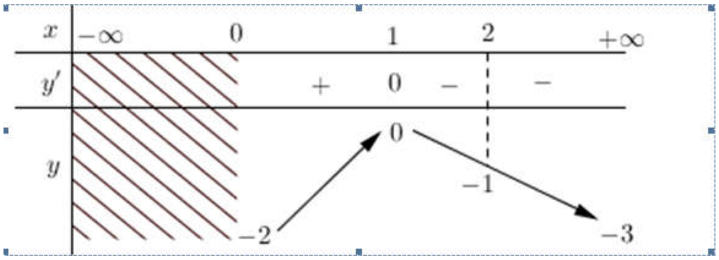
A. 31. **B.** 29. **C.** 28. **D.** 30.

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2x+3}{2x^2-x-1}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\ln|2x+1|-\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\ln|2x+1|-\frac{2}{3}\ln|x-1|+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $[0;+\infty)$, liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau.



Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1\in(0;2)$ và $x_2\in(2;+\infty)$..

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 13. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s(\mathrm{m})$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bào nhiêu?

A. $64(\mathrm{m/s})$ **B.** $24(\mathrm{m/s})$ **C.** $18(\mathrm{m/s})$ **D.** $108(\mathrm{m/s})$

Câu 14. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S=A.e^{r.t}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $(r>0)$, t là thời gian tăng trưởng. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ là 300 con. Hỏi sau 15 giờ có bao nhiêu con vi khuẩn?

A. 2700 con. **B.** 600 con. **C.** 1800 con. **D.** 900 con.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\log_2(x^2+x-4)=\log_2 x$ là.

A. $x=-2$ và $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** . $x=2$. **D.** $x=4$.

Câu 16. Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le 2)$ ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích của phần vật thể B..

A. $V=\sqrt{3}$. **B.** $V=\frac{4}{3}$. **C.** $V=4\sqrt{3}$. **D.** $V=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 17. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên khoảng $(1;\,2)$ là $\left(-\infty;\frac{p}{q}\right]$, trong đó $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản và $p>0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 18. Cho số phức z thỏa mãn $z+4\bar{z}=7+i(z-7)$. Khi đó, môđun của z bằng bao nhiêu?

A. $|z|=\sqrt{5}$. **B.** $|z|=3$. **C.** $|z|=5$. **D.** $|z|=\sqrt{3}$.

Câu 19. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2|=|i-z|$ là đường thẳng Δ có phương trình.

A. $2x+4y+13=0$. **B.** $-2x+4y-13=0$.

C. $4x-2y+3=0$. **D.** $4x+2y+3=0$.

Câu 20. Cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(0;3)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng AB?

A. $\left(\frac{34}{9};0\right);(-4;0)$. **B.** $(2;0)$ và $(1;0)$. **C.** $(4;0)$. **D.** $(\sqrt{13};0)$.

Câu 21. Trong mặt phẳng toạ độ cho ba điểm $A(0;3), B(0;-12), C(6;0)$. Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp.

A. $(0;-4,5)$. **B.** $(-4;0)$. **C.** $(5;-1)$. **D.** $(-4,5;0,5)$.

Câu 22. Phương trình mặt phẳng qua $A(0;0;-2)$, $B(2;-1;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):3x-2y+z+1=0$ là

A. $(\delta):-5x-7y+z+2=0$. **B.** $(\beta):9x-3y-7z-14=0$.

C. $(\gamma)5x+7y-2z-4=0$. **D.** $(\alpha):4x+5y-z-2=0$.

Câu 23. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A,B. Cạnh $AB=BC=\sqrt{2}$, $AD=2\sqrt{2}$. Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi quay hình thang $ABCD$ quanh CD là

A. $\frac{7}{6}\pi$. **B.** $\frac{14}{3}\pi$. **C.** $\frac{7}{3}\pi$. **D.** $\frac{7\sqrt{2}}{12}\pi$.

Câu 24. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB=1$, đáy lớn $CD=3$, cạnh bên $AD=\sqrt{2}$ quay quanh đường thẳng AB. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\frac{4}{3}\pi$. **B.** $V=\frac{7}{3}\pi$. **C.** $V=\frac{5}{3}\pi$. **D.** $V=3\pi$.

Câu 25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BCD}=120^0, AA'=\frac{7a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC,BD. Tính theo a thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

A. $2a^3$ **B.** $\sqrt{3}a^3$ **C.** $3a^3$ **D.** $\frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh CD và SD. Biết rằng mặt phẳng (BMN) cắt đường thẳng SA tại P. Tính tỉ số đoạn thẳng $\frac{SP}{SA}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 3.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;4;0)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-4}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 12 là

A. $(x-3)^2+(y-4)^2+z^2=5$ **B.** $(x-3)^2+(y+4)^2+z^2=5$

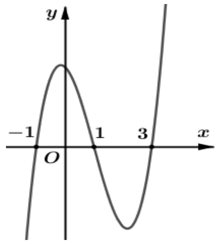
C. $(x-3)^2+(y-4)^2+z^2=25$ **D.** $(x+3)^2+(y+4)^2+z^2=25$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d là:

A. $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}$. **B.** $\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

C. $\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$. **D.** $\frac{x+1}{5}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{3}$.

Câu 29. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $g(x)=f(x^2+2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$ và điểm $A(2;1;4)$. Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho AH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T=a^3+b^3+c^3$.

A. $T=62$. **B.** $T=\sqrt{5}$. **C.** $T=13$. **D.** $T=8$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-m)$ và $f(0)=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để hàm số $|f(x)|$ có 5 số điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 32. Giả sử các nghiệm của phương trình $x^2+px+q=0$ là lập phương các nghiệm của phương trình $x^2+mx+n=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $p+q=m^3$. **B.** $p=m^3+3mn$. **C.** $p=m^3-3mn$. **D.** $\left(\frac{m}{n}\right)^3=\frac{p}{q}$.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$, $f(x)>0\ \forall x>0$ và thỏa $xf(x)+\int_1^x f(t)dt=1$ với mọi $x>0$. Giá trị của $\int_1^4 xf^2(x)dx$ gần nhất với

A. 0,35. **B.** 0,8. **C.** 0,49. **D.** 0,64.

Câu 34. Chọn ngẫu nhiên 6 số nguyên dương trong tập $\{2;3;...;10;11\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần. Gọi P xác suất để số 4 được chọn và xếp ở vị trí thứ 2. Khi đó P bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{60}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có diện tích đáy bằng 13, đường cao bằng 5. Đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB,SBC,SCD,SDA. Tính thể tích khối đa diện $O.MNPQ$.

A. $\frac{130}{27}$. **B.** $\frac{130}{81}$. **C.** $\frac{130}{9}$. **D.** $\frac{130}{63}$.

B. ĐIỀN KHUYẾT (15 CÂU)

Câu 36. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-6x+1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết hoành độ tiếp điểm bằng 1

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=x^3(x+1)^4(x+2)^5$. Số điểm cực trị của hàm số là:

Đáp án: ....

Câu 38. Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2;-1;-1)$ đến mặt phẳng (P) có phương trình $16x-12y-15z-4=0$. Độ dài của đoạn thẳng AH là.

Đáp án: ....

Câu 39. Cho tập $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số phân biệt sao cho các số này lẻ và không chia hết cho 5?

Đáp án: ....

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên R thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12$, giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2f(x)-16}-4}{x^2+x-6}$ bằng:

Đáp án: ....

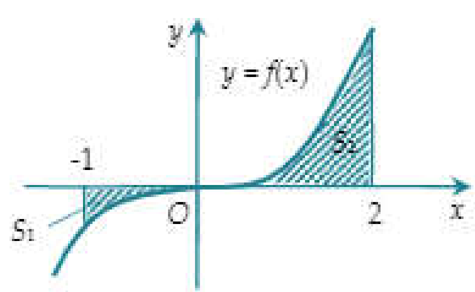
Câu 41. Cho hàm số $y=ax^2+bx-1(a\neq 0)$ có đồ thị (P). Biết (P) có trục đối xứng bằng 2 và giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3. Tích ab là :

Đáp án: ....

Câu 42. Tính tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=x^4+(m-5)x^2+5$ có 3 điểm cực trị.

Đáp án: ....

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{7}{40}$ thì a bằng bao nhiêu?



Đáp án: ....

Câu 44. Biết tập tất cả các giá trị thực của m để $4|x+m|\left(x^2+2mx+m^2-3\right)+9x+1=0$ có 4 nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Hỏi giá trị của $(b-a)$ bằng bao nhiêu?

Đáp án: ....

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z+2i|^2+2|1-\overline{z}|^2+3|z-2+i|^2=2018$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

Đáp án: ....

Câu 46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc tạo bởi đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BDD'B')$.

Đáp án: ……………

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P):(m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Tìm m.

Đáp án: ……………

Câu 48. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $b>1$ và $\sqrt{a}\le b<a$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}} a+2\log_{\sqrt{b}}\left(\frac{a}{b}\right)$ bằng:

Đáp án: ……………

Câu 49. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và DD'. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BD.

Đáp án: ……………

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SB=a\sqrt{2}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, góc giữa SC và (SAB) bằng $45°$. Góc giữa SB và mặt đáy bằng $\alpha\left(0°<\alpha<90°\right)$. Xác định α để thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất.

Đáp án: ……………

Lời giải tham khảo

A. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (35 CÂU)

Câu 1. Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20). Kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Số trung bình là:

A. $\overline{x}=15,20$ **B.** $\overline{x}=15,21$ **C.** $\overline{x}=15,23$ **D.** $\overline{x}=15,25$

Lời giải:

Chọn C $\overline{x}=\dfrac{(9.1+10.1+11.3+12.5+13.8+14.13+15.19+16.24+17.14+18.10+19.2)}{100}=15,23$

Câu 2. Một chất điểm chuyển động trên trục Ox với vận tốc thay đổi theo thời gian $v(t)=3t^2-6t$ (m/s). Tính quãng đường chất điểm đó đi được từ thời điểm $t_1=0$ (s), $t_2=4$ (s).

A. 12. **B.** 16. **C.** 24. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Quãng đường chất điểm đi được là: $S=\int_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^4\left(3t^2-6t\right)\mathrm{d}t=\left(t^3-3t^2\right)\Big|_0^4=16$.

Câu 3. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x-2)\ge 2$.

A. $(2;+\infty)$. **B.** $[11;+\infty)$. **C.** $(11;+\infty)$. **D.** $(-\infty;11)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x-2>0\Leftrightarrow x>2$

$\log_3(x-2)\ge 2\Leftrightarrow x-2\ge 9\Leftrightarrow x\ge 11$

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm bất phương trình là: $S=[11;+\infty)$.

Câu 4. Hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3x=y^3-3y \\ x^6+y^6=27 \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $x^3-3x=y^3-3y \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)-3(x-y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2+xy+y^2-3=0 \end{array}\right.$

Khi $x=y$ thì hệ có nghiệm $\left(\pm\sqrt[6]{\dfrac{27}{2}};\pm\sqrt[6]{\dfrac{27}{2}}\right)$.

Khi $x^2+xy+y^2-3=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=3-xy$, ta có $x^6+y^6=27 \Leftrightarrow (x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)=27 \Rightarrow (3-xy)\left[(3-xy)^2-3x^2y^2\right]=27$

$\Leftrightarrow 3(xy)^3+27xy=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=0 \\ (xy)^2=-9 \end{array}\right.$ (vô lí).

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Câu 5. Mặt phẳng phức $A(-4;1), B(1;3), C(-6;0)$ lần lượt biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3. Trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $-3-\dfrac{4}{3}i$. **B.** $3-\dfrac{4}{3}i$. **C.** $3+\dfrac{4}{3}i$. **D.** $-3+\dfrac{4}{3}i$.

Lời giải

Chọn D

Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(-3;\dfrac{4}{3}\right)$. Vậy G biểu diễn số phức $z=-3+\dfrac{4}{3}i$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(2;0;5)$, $C(0;-3;-1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC?

A. $x-y+2z+9=0$. **B.** $x-y+2z-9=0$.

C. $2x+3y-6z-19=0$. **D.** $2x+3y+6z-19=0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và vuông góc với đường thẳng BC nên nhận véctơ $\overrightarrow{CB}=(2;3;6)$ làm véctơ pháp tuyến. Khi đó phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) là:

$2(x-2)+3(y+1)+6(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+3y+6z-19=0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$,hình chiếu vuông góc của $A(1;3;5)$ trên mặt phẳng (Oyz) là điểm nào sau đây

A. $(1;0;0)$. **B.** $(1;3;0)$. **C.** $(1;0;5)$. **D.** $(0;3;5)$.

Lời giải

Chọn D

- Hình chiếu vuông góc của $A(1;3;-5)$ trên mặt phẳng (Oyz) là $(0;3;5)$.

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{3}{x+1}\le 0$ là

A. $S=(-\infty;1)$. **B.** $S=(-1;1)$.

C. $S=[-1;1]$. **D.** $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\frac{x}{x-1}-\frac{3}{x+1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)-3(x-1)}{x^2-1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+3}{x^2-1}\le 0$

Tam thức $f(x)=x^2-2x+3$ có $\Delta<0, a=1>0 \Rightarrow x^2-2x+3>0, \forall x\in R$

Do đó $\frac{x^2-2x+3}{x^2-1}\le 0 \Leftrightarrow x^2-1<0 \Leftrightarrow -1<x<1$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là: $S=(-1;1)$

Câu 9. Tìm số nghiệm thuộc $\left[\frac{-3\pi}{2};-\pi\right)$ của phương trình $\sqrt{3}\sin x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sqrt{3}\sin x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right) \Leftrightarrow \cos\frac{3\pi}{2}\cos 2x+\sin\frac{3\pi}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x=0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\frac{-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pm 5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$ với $k\in\mathbb{Z}$.

Trên $\left[\frac{-3\pi}{2};-\pi\right)$ ta nhận được nghiệm duy nhất $x=\frac{5\pi}{6}-2\pi=\frac{-7\pi}{6}$.

Câu 10. Người ta trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác như sau: hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 câu,… Số hàng cây trong khu vườn là

A. 31. **B.** 29. **C.** 28. **D.** 30.

Lời giải

Chọn D

◆Xét dãy số (u_n) có $u_1=1, u_2=2, u_3=3,...$Khi đó (u_n) là cấp số cộng có $u_1=1; d=1$.

◆Ta có: $u_1+u_2+u_3+....+u_n=465 \Leftrightarrow u_1.n+\frac{n(n-1)d}{2}=465 \Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)}{2}=465$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-465=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}n=30\\ n=-31\ (l)\end{array}\right.$.

◆Vậy số hàng cây trong khu vườn là 30 hàng.

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2x+3}{2x^2-x-1}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\ln|2x+1|-\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\ln|2x+1|-\frac{2}{3}\ln|x-1|+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$.

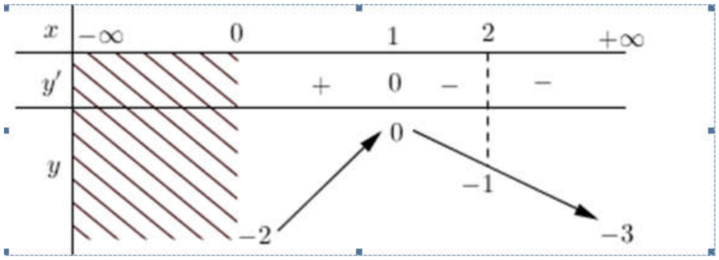
Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int \frac{2x+3}{2x^2-x-1}\mathrm{d}x=\int \frac{2x+3}{(2x+1)(x-1)}\mathrm{d}x=\int\left[-\frac{4}{3}.\frac{1}{2x+1}+\frac{5}{4}.\frac{1}{x-1}\right]\mathrm{d}x$.

$=-\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}(2x+1)}{2x+1}+\frac{5}{3}\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{x-1}=-\frac{2}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $[0;+\infty)$, liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau.

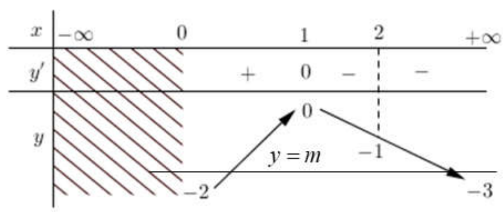


Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)=m$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1\in(0;2)$ và $x_2\in(2;+\infty)$..

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn A



.

Đường thẳng $y=m$ có vị trí như trên thì thỏa điều kiện bài toán.

Vậy $-2<m<-1$ là giá trị cần tìm.

Câu 13. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s(\mathrm{m})$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bào nhiêu?

A. $64(\mathrm{m/s})$ **B.** $24(\mathrm{m/s})$ **C.** $18(\mathrm{m/s})$ **D.** $108(\mathrm{m/s})$

Lời giải

Chọn B

Vận tốc của vật chuyển động là $v=s'=-\frac{3}{2}t^2+12t=f(t)$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;6]$

Ta có $f'(t)=-3t+12\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=4\in[0;6]$

$f(0)=0; f(4)=24; f(6)=18$

Vậy vận tốc lớn nhất là $24(\mathrm{m/s})$.

Câu 14. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{r.t}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $(r > 0)$, t là thời gian tăng trưởng. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ là 300 con. Hỏi sau 15 giờ có bao nhiêu con vi khuẩn?

A. 2700 con. **B.** 600 con. **C.** 1800 con. **D.** 900 con.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $300 = 100.e^{r.5} \Leftrightarrow e^{r.5} = 3 \Leftrightarrow r = \dfrac{\ln 3}{5}$. Số vi khuẩn sau 15 giờ là: $S = 100.e^{15.\frac{\ln 3}{5}} = 2700$ con.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2 + x - 4\right) = \log_2 x$ là.

A. $x = -2$ và $x = 2$. **B.** $x = -2$. **C.**. $x = 2$. **D.** $x = 4$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + x - 4 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$.

Khi đó $\log_2\left(x^2 + x - 4\right) = \log_2 x \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = x \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ (Nhận)} \\ x = -2 \text{ (Loại)} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

Câu 16. Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(0 \le x \le 2\right)$ ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích của phần vật thể B..

A. $V = \sqrt{3}$. **B.** $V = \dfrac{4}{3}$. **C.** $V = 4\sqrt{3}$. **D.** $V = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn D

$V = \int\limits_0^2 \dfrac{\left(x\sqrt{2-x}\right)^2\sqrt{3}}{4}dx = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_0^2 x^2\left(2-x\right)dx = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 17. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + \left(2m-3\right)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1;\,2)$ là $\left(-\infty;\,\dfrac{p}{q}\right]$, trong đó $\dfrac{p}{q}$ là phân số tối giản và $p > 0$. Hỏi tổng $p + q$ là?

A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = -4x^3 + 2\left(2m-3\right)x$

Hàm số $y = -x^4 + \left(2m-3\right)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right) \Leftrightarrow y' \le 0,\ \forall x \in \left(1;2\right) \Leftrightarrow -4x^3 + 2\left(2m-3\right)x \le 0,\ \forall x \in \left(1;2\right)$

$\Leftrightarrow 2m - 3 \le 2x^2, \forall x \in \left(1;2\right)$

$\Leftrightarrow m \le x^2 + \dfrac{3}{2} = f\left(x\right), \forall x \in \left(1;2\right)$

Hay $m \le \underset{(1;2)}{Min}\, f\left(x\right) = \dfrac{5}{2}$

Vậy $m \in \left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)$ nên $p = 5, q = 2 \Rightarrow p + q = 7$.

Câu 18. Cho số phức z thỏa mãn $z + 4\overline{z} = 7 + i\left(z - 7\right)$. Khi đó, môđun của z bằng bao nhiêu?

A. $|z| = \sqrt{5}$. **B.** $|z| = 3$. **C.** $|z| = 5$. **D.** $|z| = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=a+bi$ với a, $b\in\mathbb{R}$. Khi đó $\overline{z}=a-bi$.

Ta có $z+4\overline{z}=7+i(z-7)\Leftrightarrow a+bi+4(a-bi)=7+i(a+bi-7)$

$\Leftrightarrow a+bi+4a-4bi=7+ai-b-7i\Leftrightarrow 5a+b-(a+3b)i=7-7i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5a+b=7\\a+3b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$.

Do đó $z=1+2i$. Vậy $|z|=\sqrt{5}$.

Câu 19. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2|=|i-z|$ là đường thẳng Δ có phương trình.

A. $2x+4y+13=0$. **B.** $-2x+4y-13=0$.

C. $4x-2y+3=0$. **D.** $4x+2y+3=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$|z+2|=|i-z|\Leftrightarrow|x+yi+2|=|i-x-yi|\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(1-y)^2}\Leftrightarrow 4x+2y+3=0$.

Câu 20. Cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(0;3)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng AB?

A. $\left(\frac{34}{9};0\right);(-4;0)$. **B.** $(2;0)$ và $(1;0)$. **C.** $(4;0)$. **D.** $(\sqrt{13};0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta gọi $M(a;0)$, pt $AB:4x+3y-9=0, AB=5$

$\Rightarrow d(M,AB)=5\Leftrightarrow\frac{|4a-9|}{5}=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{34}{9}\\a=-4\end{array}\right.\Rightarrow M_1\left(\frac{34}{9};0\right),M_2(-4;0)$

Câu 21. Trong mặt phẳng toạ độ cho ba điểm $A(0;3),B(0;-12),C(6;0)$. Tìm toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp.

A. $(0;-4,5)$. **B.** $(-4;0)$. **C.** $(5;-1)$. **D.** $(-4,5;0,5)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Ta có $\begin{cases}IA=IB\\IA=IC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+(y-3)^2=x^2+(y+12)^2\\x^2+(y-3)^2=(x-6)^2+y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}30y=-135\\4x-2y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-\frac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow I\left(0;-\frac{9}{2}\right)$.

Câu 22. Phương trình mặt phẳng qua $A(0;0;-2)$, $B(2;-1;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):3x-2y+z+1=0$ là

A. $(\delta):-5x-7y+z+2=0$. **B.** $(\beta):9x-3y-7z-14=0$.

C. $(\gamma)5x+7y-2z-4=0$. **D.** $(\alpha):4x+5y-z-2=0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) có 1 VTPT $\overrightarrow{n_p}=(3;-2;1)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-1;3)$.

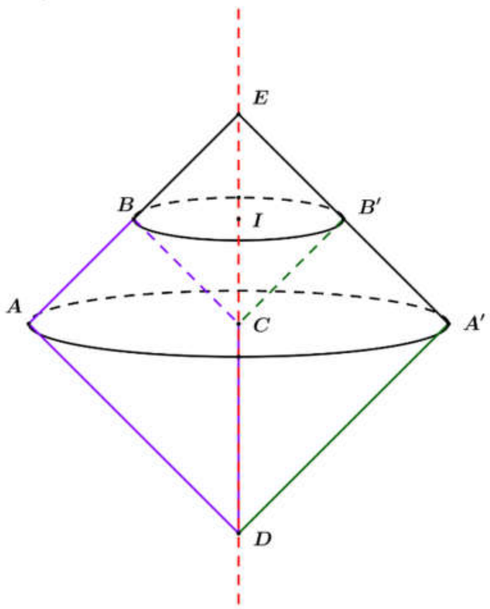
Mặt phẳng cần tìm có VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{n_p},\overrightarrow{AB}\right]=(-5;-7;1)$ và đi qua điểm $A(0;0;-2)$ nên có phương trình: $-5x-7y+z+2=0$.

Câu 23. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, B. Cạnh $AB = BC = \sqrt{2}$, $AD = 2\sqrt{2}$. Thể tích khối tròn xoay tạo ra khi quay hình thang $ABCD$ quanh CD là

A. $\frac{7}{6}\pi$. **B.** $\frac{14}{3}\pi$. **C.** $\frac{7}{3}\pi$. **D.** $\frac{7\sqrt{2}}{12}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD.

Gọi A' và B' lần lượt là các điểm đối xứng với A, B qua đường thẳng CD.

Gọi I là trung điểm của đoạn BB'.

Ta có $\frac{BC}{AD} = \frac{EB}{EA} = \frac{EC}{ED} = \frac{1}{2} \Rightarrow EC = ED$ và $AB = BE$.

Khi đó, các khối nón đỉnh E, đỉnh C có đáy là đường tròn $(I; IB)$ bằng nhau; các khối nón đỉnh E và đỉnh D có đáy là đường tròn (C, CA) bằng nhau.

Gọi V_1 là thể tích của khối nón đỉnh D, đáy là đường tròn (C, CA)

Gọi V_2 là thể tích của khối nón đỉnh C, đáy là đường tròn (I, IB)

Gọi V là thể tích của khối tròn xoay khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục CD.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2 \Rightarrow IB = \frac{1}{2}AC = 1$.

ΔACD vuông cân tại $C \Rightarrow CD = AC = 2 \Rightarrow IC = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}AC = 1$

Do đó

$V_1 = \frac{1}{3}\pi.AC^2.CD = \frac{1}{3}\pi.2^2.2 = \frac{8}{3}\pi$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi.BI^2.IC = \frac{1}{3}\pi.1^2.1 = \frac{1}{3}\pi$

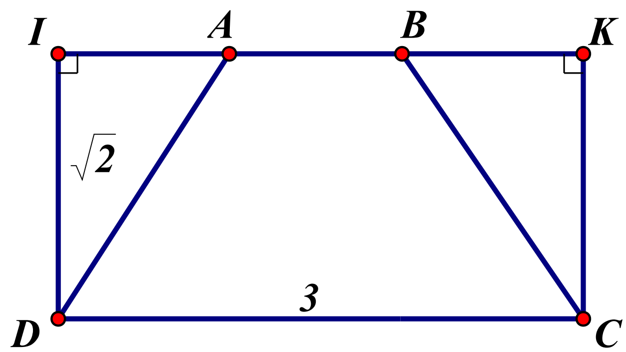
Vậy $V = 2V_1 - 2V_2 = \frac{14}{3}\pi$.

Câu 24. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB = 1$, đáy lớn $CD = 3$, cạnh bên $AD = \sqrt{2}$ quay quanh đường thẳng AB. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.

A. $V = \frac{4}{3}\pi$. **B.** $V = \frac{7}{3}\pi$. **C.** $V = \frac{5}{3}\pi$. **D.** $V = 3\pi$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $DI \perp AB; CK \perp AB \Rightarrow IA = AB = BK = 1$

$\Rightarrow DI = CK = 1$

Khối tròn xoay tạo thành chính là khối trụ tạo thành từ hình chữ nhật $IKCD$, bỏ đi 2 khối nón tạo thành từ tam giác AID, BKC khi quay quanh cạnh AB.

Khối trụ có bán kính đáy bằng 1, đường sinh bằng 3 nên có thể tích $V_T = 3\pi$.

Khối nón có bán kính đáy bằng 1, đường cao bằng 1 nên có thể tích $V_N = \frac{1}{3}\pi$.

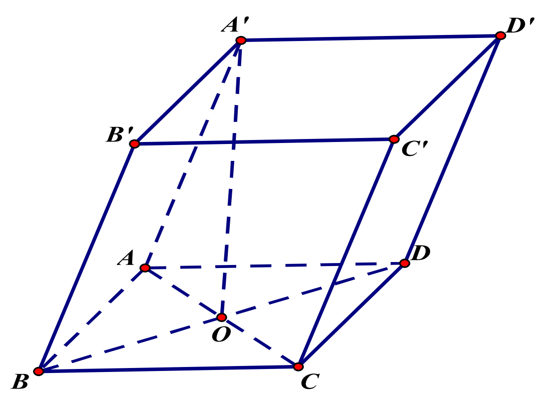
Khối tròn xoay cần tính thể tích bằng: $V = V_T - 2V_N = \frac{7\pi}{3}$.

Câu 25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BCD} = 120^0, AA' = \frac{7a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC, BD. Tính theo a thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

A. $2a^3$ **B.** $\sqrt{3}a^3$ **C.** $3a^3$ **D.** $\frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$.

Thể tích khối $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = A'O.S_{ABCD}$

Do $BCD = 120^0$ suy ra tam giác ABC đều.

Suy ra $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ và $A'O = \sqrt{A'A^2 - AO} = \sqrt{\frac{49a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = 2\sqrt{3}a$

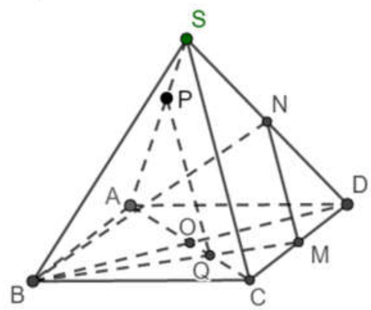
Vậy $V = 2\sqrt{3}a.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 3a^3$

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh CD và SD. Biết rằng mặt phẳng (BMN) cắt đường thẳng SA tại P. Tính tỉ số đoạn thẳng $\frac{SP}{SA}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C



Chọn mặt phẳng phụ (SAC) chứa SA.

Gọi $Q = AC \cap BM$.

Ta có : $MN // (\text{SAC})$ (do) $MN // \text{SC}$.

Suy ra : giao tuyến của (BMN) và (SAC) là đường thẳng qua Q và song song với SC, cắt SA tại P.

$\Rightarrow P = SA \cap (BMN)$.

Ta có : Q là trọng tâm tam giác BCD.

$\Rightarrow CQ = \frac{2}{3}CO = \frac{1}{3}CA$.

$\Rightarrow AQ = \frac{2}{3}AC$.

Do $PQ // SC$ $\Rightarrow \frac{AP}{AS} = \frac{AQ}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SP}{SA} = \frac{1}{3}$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;4;0)$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-4}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng 12 là

A. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 5$ **B.** $(x-3)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 5$

C. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 25$ **D.** $(x+3)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25$

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;-4)$.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (-2;-2;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right] = (9;-9;0) \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right]\right| = 9\sqrt{2}$.

Khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ là

$$d(I,\Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = 3.$$

Diện tích tam giác IAB bằng 12 nên

$AB=\dfrac{2S_{IAB}}{d\left(I,\Delta\right)}=\dfrac{2.12}{3}=8$.

Bán kính mặt cầu $\left(S\right)$ là

$R=\sqrt{\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2+\left[d\left(I,\Delta\right)\right]^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

Phương trình mặt cầu $\left(S\right)$ cần lập là

$\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2+z^2=25$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d là:

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

C. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$. **D.** $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có VTPT của mp(P) là $\vec{n}=(1;2;1)$; VTCP của đường thẳng d là $\vec{u}_d=(2;1;3)$.

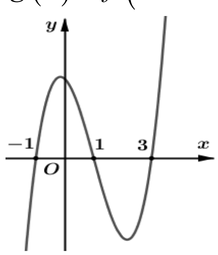
Vì $\begin{cases}\Delta\subset(P)\\ \Delta\perp d\end{cases}$ nên VTCP của Δ là $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{u}_d\right]=(5;-1;-3)$.

Lại có $\begin{cases}d\cap\Delta=\left\{M\right\}\\ \Delta\subset(P)\end{cases}\Rightarrow\left\{M\right\}=d\cap(P)$.

Khi đó $M(1;1;1)$.

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Câu 29. Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'\left(x\right)$. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2+2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=\left(x^2+2x\right)'f'\left(x^2+2x\right)=(2x+2)f'\left(x^2+2x\right)$.

Suy ra

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+2=0\\ f'\left(x^2+2x\right)=0\end{array}\right. \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \left[\begin{array}{l}2x+2=0\\ x^2+2x=-1\\ x^2+2x=1\\ x^2+2x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-1+\sqrt{2}\\ x=-1-\sqrt{2}\\ x=1\\ x=-3\end{array}\right..$$

Ta lại có: $f'\left(x^2+2x\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x^2+2x<1\\ x^2+2x>3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+2x-1<0\\ x^2+2x+1>0\\ x^2+2x-3>0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}\\ x\neq -1\\ x>1\\ x<-3\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $y'=(2x+2)f'\left(x^2+2x\right)$.

x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'\left(x^2+2x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=f\left(x^2+2x\right)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và điểm $A(2;1;4)$. Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d sao cho AH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T=a^3+b^3+c^3$.

A. $T=62$. **B.** $T=\sqrt{5}$. **C.** $T=13$. **D.** $T=8$.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\ y=2+t\ ;\ t\in\mathbb{R}\\ z=1+2t\end{cases}$.

Mà $H\in d \Rightarrow H(1+t;2+t;1+2t)$.

$\Rightarrow AH=\sqrt{(t-1)^2+(t+1)^2+(2t-3)^2}=\sqrt{6t^2-12t+11}=\sqrt{6(t-1)^2+5}\geq\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(2;3;3)$.

$\Rightarrow a=2;b=3;c=3 \Rightarrow T=8+27+27=62$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-m)$ và $f(0)=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để hàm số $\left|f(x)\right|$ có 5 số điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$f'(x)=(x+1)(x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=m\end{array}\right.$. $f'(x)=(x+1)(x-m)=x^2+(-m+1)x-m$

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{-m+1}{2}x^2-mx+C$.

$f(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{-m+1}{2}x^2-mx$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \frac{1}{3}x^2+\frac{-m+1}{2}x-m=0\ (*) \end{array}\right.$$

Hàm số $|f(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị và $f(x)=0$ có 3 nghiệm bội lẻ.

$\Leftrightarrow$ hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị và phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ \Delta=\left(\frac{-m+1}{2}\right)^2-4.\frac{1}{3}.(-m)=\frac{1}{4}m^2+\frac{5}{6}m+\frac{1}{4}>0 \\ \frac{1}{3}.0^2+\frac{-m+1}{2}.0-m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \in (-\infty;-3) \cup \left(-\frac{1}{3};+\infty\right) \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty;-3) \cup \left(-\frac{1}{3};+\infty\right) \backslash \{0\}$$

Vì m nguyên và thuộc đoạn $[-5;5]$ nên $m \in \{1;2;3;\pm 4;\pm 5\}$ nên có 7 tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 32. Giả sử các nghiệm của phương trình $x^2+px+q=0$ là lập phương các nghiệm của phương trình $x^2+mx+n=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $p+q=m^3$. **B.** $p=m^3+3mn$. **C.** $p=m^3-3mn$. **D.** $\left(\frac{m}{n}\right)^3=\frac{p}{q}$.

Lời giải.

Chọn C

Giả sử phương trình $x^2+px+q=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $x^2+mx+n=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4.

Theo bài ra, ta có $\begin{cases} x_1=x_3^3 \\ x_2=x_4^3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1+x_2=x_3^3+x_4^3=(x_3+x_4)\left[(x_3+x_4)^2-3x_3x_4\right]$. $(*)$

Theo hệ thức Viet, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_3+x_4=-m \\ x_3x_4=n \end{cases}$, thay vào $(*)$, ta được $-p=-m(m^2-3n)$.

Vậy $p=m(m^2-3n)=m^3-3mn$.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$, $f(x)>0\ \forall x>0$ và thỏa $xf(x)+\int_1^x f(t)dt=1$ với mọi $x>0$. Giá trị của $\int_1^4 xf^2(x)dx$ gần nhất với

A. 0,35. **B.** 0,8 . **C.** 0,49 . **D.** 0,64 .

Lời giải

Đạo hàm hai vế $xf(x)+\int_1^x f(t)dt=1$ ta có

$f(x)+xf'(x)+f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{-2}{x}, \forall x>0$

$\Rightarrow \ln(f(x))=\ln x^{-2}+C \Rightarrow f(x)=\dfrac{k}{x^2}$ với $k>0$

Từ giả thiết $xf(x)+\int\limits_1^x f(t)dt=1$, thay $x=1$ ta có $f(1)=1$ nên $k=1$

Suy ra $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $\int\limits_1^4 xf^2(x)dx=\int\limits_1^4 \dfrac{1}{x^3}dx=\dfrac{15}{32}=0,46875$

Câu 34. Chọn ngẫu nhiên 6 số nguyên dương trong tập $\{2;3;...;10;11\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần. Gọi P xác suất để số 4 được chọn và xếp ở vị trí thứ 2. Khi đó P bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{60}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

- Với mỗi cách chọn 6 số nguyên dương trong tập $\{2;3;...;10;11\}$ chỉ có một cách sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần, do đó $n(\Omega)=C_{10}^6$.

- Để số 4 được chọn và xếp ở vị trí thứ 2 thì phải chọn được một số nhỏ hơn 4, số 4 và bốn số lớn hơn 4.

Gọi A là biến cố: số 4 được chọn và xếp ở vị trí thứ 2.

$\Rightarrow n(A)=C_2^1.C_7^4$.

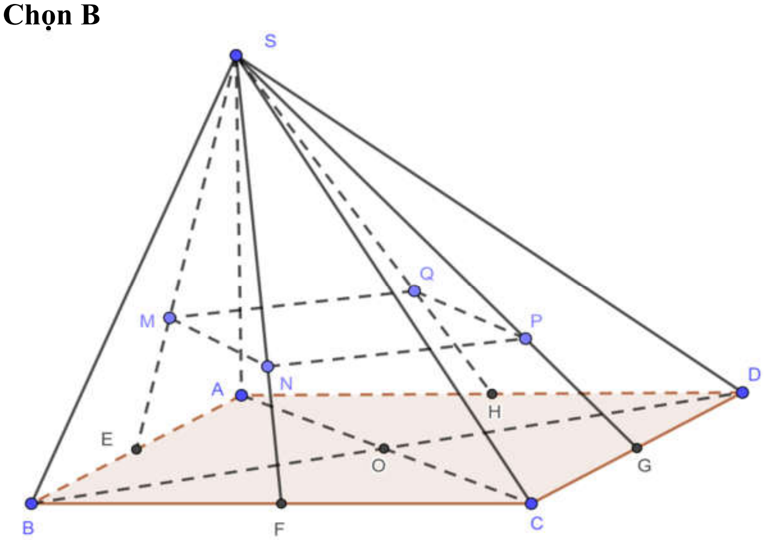
- Xác suất của biến cố A là: $P=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_2^1.C_7^4}{C_{10}^6}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có diện tích đáy bằng 13, đường cao bằng 5. Đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB,SBC,SCD,SDA. Tính thể tích khối đa diện $O.MNPQ$.

A. $\dfrac{130}{27}$. **B.** $\dfrac{130}{81}$. **C.** $\dfrac{130}{9}$. **D.** $\dfrac{130}{63}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi h là chiều cao của hình chóp $S.ABCD$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.h = \frac{1}{3}.13.5 = \frac{65}{3}$.

Ta có: $d\left(O;\left(MNPQ\right)\right) = d\left(E;\left(MNPQ\right)\right) = \frac{1}{2}d\left(S;\left(MNPQ\right)\right) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}d\left(S;\left(ABCD\right)\right) = \frac{1}{3}h$

$S_{MNPQ} = 2S_{\Delta MNQ} = 2.\frac{1}{2}.MQ.MN.\sin\widehat{NMQ}$

$= 2.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}EH.\frac{2}{3}EF.\sin\widehat{HEF} = \frac{8}{9}.S_{\Delta EFH} = \frac{8}{9}.\frac{1}{4}.S_{ABCD} = \frac{2}{9}.S_{ABCD}$.

Do đó: $V_{O.MNPQ} = \frac{1}{3}S_{MNPQ}.d\left(O;\left(MNPQ\right)\right) = \frac{1}{3}.\frac{2}{9}.S_{ABCD}.\frac{1}{3}h = \frac{2}{27}V_{S.ABCD} = \frac{2}{27}.\frac{65}{3} = \frac{130}{81}$.

B. ĐIỀN KHUYẾT (15 CÂU)

Câu 36. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết hoành độ tiếp điểm bằng 1

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Gọi $M\left(x_0; y_0\right)$ là tiếp điểm

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6$.

Ta có: $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1, y'(1) = 3$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = 3(x-1) - 1 = 3x - 4$.

Câu 37. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có $f'\left(x\right) = x^3\left(x+1\right)^4\left(x+2\right)^5$. Số điểm cực trị của hàm số là:

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Ta có $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Chỉ khi qua các nghiệm $x = 0; x = -2$ đạo hàm $f'\left(x\right)$ mới đổi dấu nên đây là hai điểm cực trị của hàm số.

Câu 38. Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A\left(2;-1;-1\right)$ đến mặt phẳng $\left(P\right)$ có phương trình $16x - 12y - 15z - 4 = 0$. Độ dài của đoạn thẳng AH là.

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

$AH = d\left(A,\left(P\right)\right) = \frac{\left|16.2 + 12 + 15 - 4\right|}{\sqrt{16^2 + 12^2 + 15^2}} = \frac{11}{5}$.

Câu 39. Cho tập $A = \left\{1,2,3,4,5,6,7,8\right\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số phân biệt sao cho các số này lẻ và không chia hết cho 5?

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Gọi số tự nhiên có 8 chữ số phân biệt là : $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$

Do các số cần lập là số lẻ và không chia hết cho 5 nên chọn a_8 có 3 cách, $a_8 = \{1;3;7\}$.

Xếp 7 số vào 7 vị trí còn lại có $7!$ cách.

Vậy, có $3.7! = 15120$ số cần lập.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên R thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-16}{x-2} = 12$, giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2f(x)-16}-4}{x^2+x-6}$ bằng:

Đáp án: ....

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-16}{x-2} = 12 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 16$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2f(x)-16}-4}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2}\frac{2f(x)-32}{\left(x^2+x-6\right)\left(\sqrt{2f(x)-16}+4\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{2\left(f(x)-16\right)}{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{2f(x)-16}+4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2\left(f(x)-16\right)}{(x-2)(x+3)\left(\sqrt{2f(x)-16}+4\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{2\left(f(x)-16\right)}{x-2}.\frac{1}{(x+3)\sqrt{2f(x)-16}+4} = 2.12.\frac{1}{5.8} = \frac{3}{5}$$

Câu 41. Cho hàm số $y = ax^2 + bx - 1 (a \neq 0)$ có đồ thị (P). Biết (P) có trục đối xứng bằng 2 và giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3. Tích ab là :

Đáp án: ....

Lời giải

(P) có trục đối xứng bằng 2 và giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3 suy ra tọa độ đỉnh $I(2;3)$, $(a<0)$.

Ta có:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ \Delta = -12a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 16a^2 + 16a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ \left[\begin{array}{l} a = 0\,(l) \\ a = -1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Vậy $ab = -4$.

Câu 42. Tính tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 + (m-5)x^2 + 5$ có 3 điểm cực trị.

Đáp án: ....

Lời giải

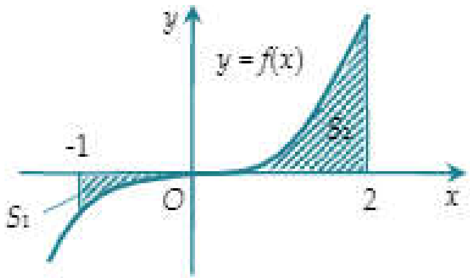
Để hàm số $y = x^4 + (m-5)x^2 + 5$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$.

$\Leftrightarrow 1.(m-5) < 0 \Rightarrow m < 5$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$. Suy ra $m \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

Vậy $s = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + ax$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{7}{40}$ thì a bằng bao nhiêu?



Đáp án: ....

Lời giải

Ta có:

$$S_1=\int_{-1}^{0}\left|f(x)\right|dx=\int_{-1}^{0}-f(x)dx=\int_{0}^{-1}f(x)dx=\left(\frac{1}{12}x^4+\frac{a}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{-1}=\frac{1}{12}+\frac{a}{2}$$

$$S_2=\int_{0}^{2}\left|f(x)\right|dx==\left(\frac{1}{12}x^4+\frac{a}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{2}=\frac{4}{3}+2a$$

Mà $\frac{S_1}{S_2}=\frac{7}{40}$ nên $\frac{\frac{1}{12}+\frac{a}{2}}{\frac{4}{3}+2a}=\frac{7}{40}\Rightarrow\frac{10}{3}+20a=\frac{28}{3}+14a\Rightarrow a=1$

Vậy $a=1$.

Câu 44. Biết tập tất cả các giá trị thực của m để $4\left|x+m\right|\left(x^2+2mx+m^2-3\right)+9x+1=0$ có 4 nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Hỏi giá trị của $(b-a)$ bằng bao nhiêu?

Đáp án: ....

Lời giải

Ta có: $4\left|x+m\right|\left(x^2+2mx+m^2-3\right)+9x+1=0$ (*)

$\Leftrightarrow 4\left|x+m\right|\left[(x+m)^2-3\right]+9(x+m)+1-9m=0$

$\Leftrightarrow 4\left|x+m\right|^3-12\left|x+m\right|+9(x+m)+1=9m$.

Đặt $t=x+m$.

Phương trình trở thành: $4\left|t\right|^3-12\left|t\right|+9t+1=9m$ (**).

Xét hàm số $f(t)=4\left|t\right|^3-12\left|t\right|+9t+1,\ t\in\mathbb{R}$.

$$f(t)=\begin{cases}4t^3-3t+1, & t\ge 0\\ -4t^3+21t+1, & t<0\end{cases}\Rightarrow f'(t)=\begin{cases}12t^2-3, & t>0\\ -12t^2+21, & t<0\end{cases}.$$

$f'(0^+)\ne f'(0^-)\Rightarrow \nexists f'(0)$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{2}\\ t=-\frac{\sqrt{7}}{2}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{7}}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-7\sqrt{7}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (**) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(t)$ cắt đường thẳng $y=9m$ tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow 9m\in(0;1)\Leftrightarrow m\in\left(0;\frac{1}{9}\right)$.

Vậy $a=0; b=\frac{1}{9}\Rightarrow b-a=\frac{1}{9}$.

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z+2i|^2+2|1-\bar{z}|^2+3|z-2+i|^2=2018$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

Đáp án: ....

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ biểu diễn số phức z. Khi đó

$|z+2i|^2+2|1-\bar{z}|^2+3|z-2+i|^2=2018$

$\Leftrightarrow x^2+(y+2)^2+2(x-1)^2+2y^2+3(x-2)^2+3(y+1)^2=2018$

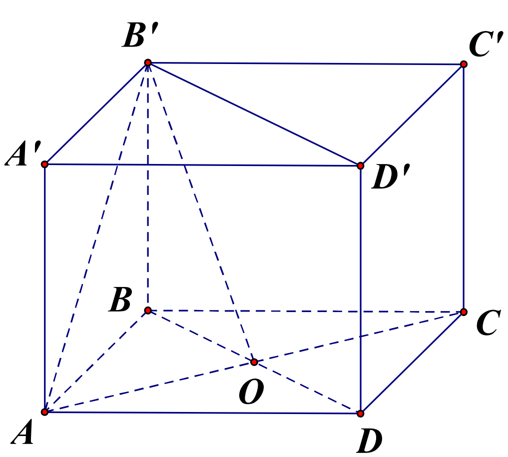
$\Leftrightarrow 6x^2+6y^2-16x+10y-1997=0\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}y-\frac{1997}{6}=0$.

Tâm của đường tròn là $\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{6}\right)$.

Câu 46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc tạo bởi đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BDD'B')$.

Đáp án: ....

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó ta có $AO\perp BD$ (1).

Mặt khác ta lại có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BB'\perp(ABCD)\Rightarrow BB'\perp AO$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AO\perp(BDD'B')$ tại O.

Khi đó $B'O$ là hình chiếu của AB' lên mặt phẳng $(BDD'B')$.

Suy ra góc tạo bởi đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BDD'B')$ là $\widehat{AB'O}$.

Xét tam giác vuông $AB'O$ có $\sin\widehat{AB'O} = \dfrac{AO}{AB'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AB'O} = 30°$.

Vậy $\widehat{(AB',(BDD'B'))} = 30°$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P):(m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Tìm m.

Đáp án: ………….

Lời giải

Ta có $d(A;(P)) = \dfrac{|(m-1).1+1+m.2-1|}{\sqrt{(m-1)^2+1^2+m^2}} = \dfrac{|3m-1|}{\sqrt{2m^2-2m+2}} = \sqrt{\dfrac{9m^2-6m+1}{2m^2-2m+2}}$

Nhận xét $T = \dfrac{9m^2-6m+1}{2m^2-2m+2} \ge 0$, với $m \in \mathbb{R}$.

Ta có $T = \dfrac{9m^2-6m+1}{2m^2-2m+2} \Leftrightarrow (2T-9)m^2 - 2(T-3)m + 2T - 1 = 0 \quad (*)$

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = (T-3)^2 - (2T-9)(2T-1) \ge 0 \Leftrightarrow -3T^2 + 14T \ge 0$

$\Leftrightarrow 0 \le T \le \dfrac{14}{3}$.

Do đó $d(A;(P))$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{\sqrt{42}}{3}$ khi $m=5$

Câu 48. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $b>1$ và $\sqrt{a} \le b < a$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2\log_{\sqrt{b}}\left(\dfrac{a}{b}\right)$ bằng:

Đáp án: ………….

Lời giải

Đặt $t = \log_a b$, vì $b>1$ và $\sqrt{a} \le b < a$ nên $\dfrac{1}{2} \le t < 1$.

Ta có $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2\log_{\sqrt{b}}\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{4}{t} - 4 = f(t)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{4}{t} - 4$ trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{2};1\right)$, ta có

$f'(t) = \dfrac{1}{(1-t)^2} - \dfrac{4}{t^2} = \dfrac{(3t-2)(2-t)}{t^2.(1-t)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \notin \left[\dfrac{1}{2};1\right)$ hoặc $t = \dfrac{2}{3} \in \left[\dfrac{1}{2};1\right)$.

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	6	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

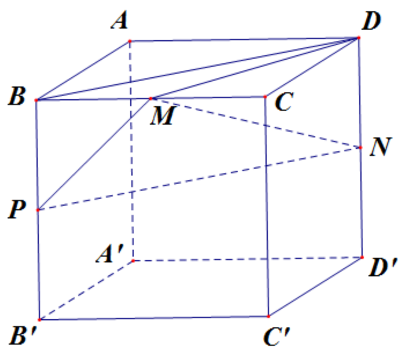
Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right)} f(t)=5$ khi $t=\frac{2}{3}$.

Vậy $\min P=5$ khi $\log_a b=\frac{2}{3} \Leftrightarrow b=\sqrt[3]{a^2}$.

Câu 49. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và DD'. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BD.

Đáp án: ....

Lời giải



Gọi P là trung điểm BB' Ta có $BD\,//\,PN \Rightarrow BD//\left(MPN\right)$. Do đó $d\left(MN;BD\right)=d\left(BD;\left(MPN\right)\right)=d\left(B;\left(MPN\right)\right)$.

$V_{B.PMN}=V_{N.BMP}=\frac{1}{3}.CD.\frac{1}{2}.BP.BM=\frac{1}{6}a.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}=\frac{a^3}{24}$.

$MP=\sqrt{BP^2+BM^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $PN=BD=a\sqrt{2}$; $MN=\sqrt{MD^2+DN^2}=\sqrt{CM^2+CD^2+DN^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Nhận thấy $MP^2+MN^2=PN^2$ nên tam giác MPN vuông tại M.

Do đó $S_{MPN}=\frac{1}{2}MP.MN=\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

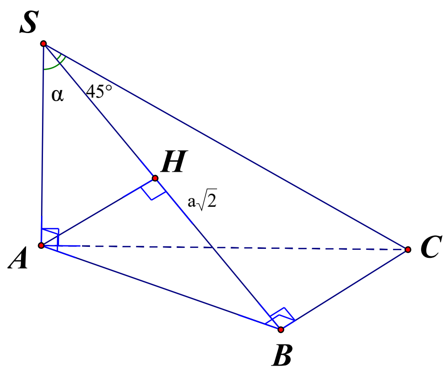
Ta có $V_{B.PMN}=\frac{1}{3}d\left(B,\left(MPN\right)\right).S_{MPN} \Leftrightarrow d\left(B,\left(MPN\right)\right)=\frac{3V_{B.PMN}}{S_{MPN}} \Leftrightarrow d\left(B,\left(MPN\right)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $d\left(MN,BD\right)=\frac{\sqrt{3}a}{6}$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp\left(ABC\right)$, $SB=a\sqrt{2}$. Hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SBC\right)$ vuông góc với nhau, góc giữa SC và $\left(SAB\right)$ bằng 45°. Góc giữa SB và mặt đáy bằng $\alpha\left(0^\circ<\alpha<90^\circ\right)$. Xác định α để thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất.

Đáp án: ....

Lời giải



Dựng AH vuông góc SB tại H
Suy ra $AH \perp BC$
Lại có $SA \perp BC$
Do đó $BC \perp (SAB)$
Suy ra $BC \perp AB$ và $BC \perp SB$
Suy ra ΔABC và ΔSBC vuông tại B.
Khi đó $\widehat{BSC} = \left(\widehat{SC,(SAB)}\right) = 45°$
Do đó ΔSBC vuông cân tại B nên $SB = BC = a\sqrt{2}, SC = 2a$
Mặt khác $\widehat{SBA} = \left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \alpha$.
Từ ΔSAB, ta có $AB = a\sqrt{2}\cos\alpha, SA = a\sqrt{2}\sin\alpha$
$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{6}AB.SA.BC = \frac{2a^3\sqrt{2}}{6}\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}\sin 2\alpha$
$V_{S.ABC}$ lớn nhất khi $\sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45°$.