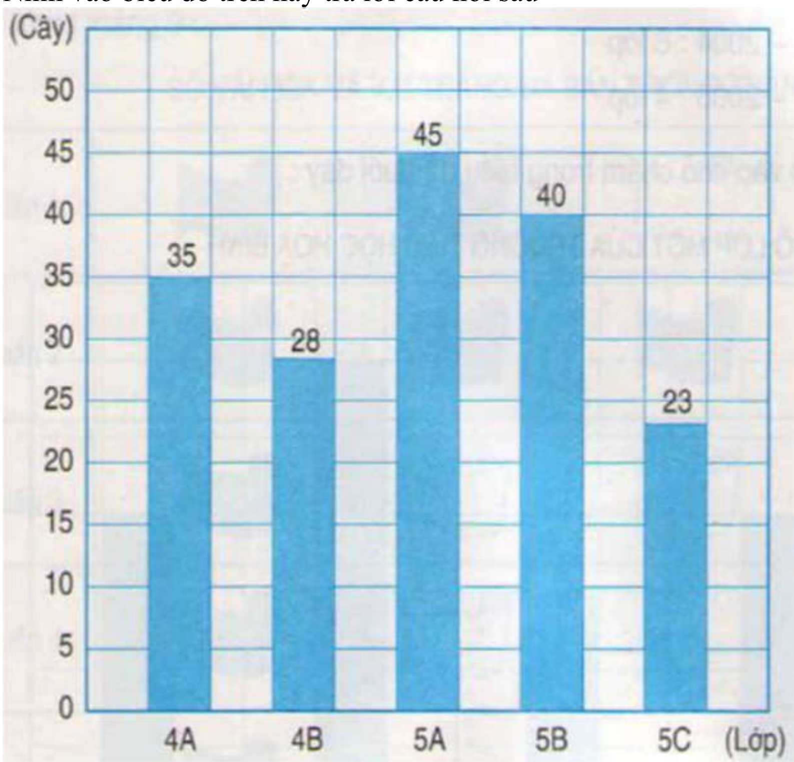
ĐỀ SỐ 3. ÔN THI ĐGNL ĐHQG HÀ NỘI 2021-2022

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

A. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (35 CÂU)

Câu 1. Nhìn vào biểu đồ trên hãy trả lời câu hỏi sau



Lớp 4A trồng được bao nhiêu cây?

A. 35. **B.** 45.
C. 28. **D.** 40

Câu 2. Một ô tô đang đứng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t)=6-3t\left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường ô tô đi được kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là

A. $6\,(m)$. **B.** $12\,(m)$. **C.** $8\,(m)$. **D.** $10\,(m)$.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\log_2(1-x)=2$ là:

A. $x=5$. **B.** $x=-4$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Câu 4. Gọi $(x;y)$ là nghiệm dương của hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\\ x^2+y^2=128\end{cases}$. Tổng $x+y$ bằng

A. 12. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 0.

Câu 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm A,B như hình vẽ bên. Trung điểm của đoạn thẳng AB biểu diễn số phức.

A. $2-i$. **B.** $2-\frac{1}{2}i$. **C.** $-\frac{1}{2}+2i$. **D.** $-1+2i$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $M(1;3;2)$, $N(5;2;4)$, $P(2;-6;-1)$ có dạng $Ax+By+Cz+D=0$. Tính tổng $S=A+B+C+D$.

A. $S=1$. **B.** $S=6$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=-3$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc mặt phẳng (P) tại điểm H. Tìm tọa độ điểm H.

A. $H(3;0;2)$. **B.** $H(-3;0;-2)$. **C.** $H(-1;4;4)$ **D.** $H(1;-1;0)$.

Câu 8. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(x^2-5x+4\right)\sqrt{x^2-9} \le 0$ là

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(m^2+1\right)$ vô nghiệm.

A. $m \in (-\infty;+\infty)$. **B.** $m \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

C. $m \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$. **D.** $m \in [-1;1]$.

Câu 10. Bạn A thả quả bóng cao su từ độ cao $10\,\text{m}$ theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng có độ cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.

A. 80 m. **B.** 40 m. **C.** 70 m. **D.** 50 m.

Câu 11. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+3x-1}{x^2+2x+1}$ biết $F(1) = \dfrac{1}{3}$.

A. $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{3}$ **B.** $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{13}{6}$

C. $F(x) = x^2 + x + \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{8}{3}$ **D.** $F(x) = x^2 + x - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{3}$

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(-2)=m+1, f(1)=m-2$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\dfrac{1}{2}f(x) - \dfrac{2x+1}{x+3} \le m$ có nghiệm $x \in [-2;1]$ là:

A. $\left(-5;-\dfrac{7}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-2;7)$. **D.** $\left[-\dfrac{7}{2};+\infty\right)$.

Câu 13. Một vật đang chuyển động với vận tốc $10\,(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 2t + \dfrac{1}{3}t^2 \quad (\text{m/s}^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi quãng đường vật đi được trong thời gian 12 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu mét?

A. $1272\,(m)$. **B.** $456\,(m)$. **C.** $1172\,(m)$. **D.** $1372\,(m)$.

Câu 14. Số lượng của một số loài vi khuẩn sau t (giờ) được xấp xỉ bởi đẳng thức $Q = Q_o.e^{0,195t}$, trong đó Q_o là số lượng vi khuẩn ban đầu. Nếu số lượng vi khuẩn ban đầu là 5000 con thì sau bao lâu có 100000 con?

A. 24. **B.** $15,36$. **C.** $3,55$. **D.** 20.

Câu 15. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2 x = 4$

A. $S=\{2\}$. **B.** $S=\{16\}$. **C.** $S=\{8\}$. **D.** $S=\{6\}$.

Câu 16. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y=-x^2+4x$ và đường thẳng $(d): y=x$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay do hình phẳng (H) quay xung quanh trục hoành.

A. $V=\dfrac{108\pi}{10}$. **B.** $V=\dfrac{81\pi}{5}$. **C.** $V=\dfrac{108\pi}{5}$. **D.** $V=\dfrac{81\pi}{10}$.

Câu 17. Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 8 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 7

Câu 18. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1+i)z+(2-i)\overline{z}=13+2i$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 19. Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa $|zi+1|=1$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

A. $I(1;0)$. **B.** $I(0;-1)$. **C.** $I(0;1)$. **D.** $I(-1;0)$.

Câu 20. Cho đường thẳng Δ: $2x-y+1=0$ và một điểm $M(1,-2)$. Tọa độ hình chiếu H của điểm $M(1,-2)$ trên đường thẳng Δ là:

A. $H(1,-1)$. **B.** $H(-1,1)$. **C.** $H(-1,-1)$. **D.** $H(1,1)$.

Câu 21. Tìm bán kính đường tròn đi qua 3 điểm $A(0;0)$, $B(0;6)$, $C(8;0)$.

A. $\sqrt{5}$. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Ox và cắt mặt cầu theo một đường tròn có chu vi bằng 6π..

A. $(P): 2y-z=0$. **B.** $(P): 3y-z=0$.

C. $(P): y-2z=0$. **D.** $(P): y-2z+1=0$.

Câu 23. Cho hình nón có bán kính đáy $r=\sqrt{3}$ và có độ dài đường sinh $l=4$. Tính thể tích khối nón đã cho.

A. $V=12\pi$. **B.** $V=4\pi$. **C.** $V=3\pi\sqrt{13}$. **D.** $V=\pi\sqrt{13}$.

Câu 24. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O, O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a, trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB=2a$. Thể tích tứ diện $OO'AB$ là

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 25. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với mặt đáy và $\widehat{B'BC}=30^0$. Thể tích khối chóp $A.CC'B$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối vuông góc. Cắt tứ diện đó bằng một mặt phẳng song song với một cặp cạnh đối diện của tứ diện. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Thiết diện là hình bình hành. **B.** Thiết diện là hình thang.

C. Thiết diện là hình chữ nhật. **D.** Thiết diện là hình vuông.

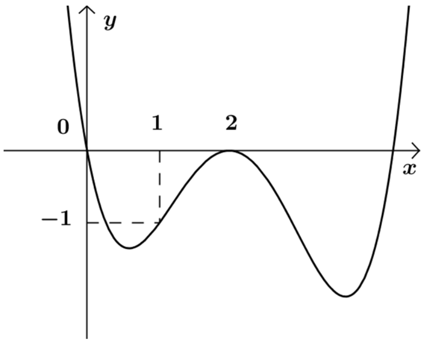
Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(m;0;0)$, $B(0;m-1;0)$; $C(0;0;m+4)$ thỏa mãn $BC=AD$, $CA=BD$ và $AB=CD$. Giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoai tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{14}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=y+1=z-2$. Hình chiếu của d lên mặt phẳng (Oxy) là.

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=0 \\ y=-1-t \\ z=0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$.

Câu 29. Cho hàm số bậc năm $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x+4\right)$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 30. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(9;-3;5)$, $B(a;b;c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oxz) và (Oyz). Biết M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM=MN=NP=PB$. Giá trị của tổng $a+b+c$ là:

A. 15. **B.** 21. **C.** -21. **D.** -15.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-5	↗	$+\infty$

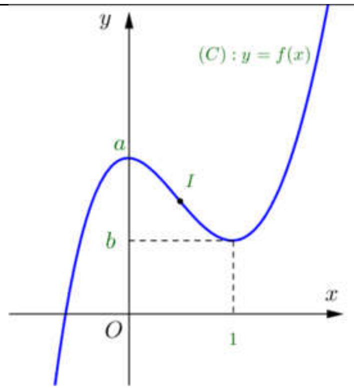
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f(x)+2m-1\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** vô số.

Câu 32. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $2\left(x^2+2x\right)^2-(4m-3)\left(x^2+2x\right)+1-2m=0$ có đúng 3 nghiệm $\in[-3;0]$

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số bậc ba liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) như hình vẽ, trong đó $I\left(\frac{1}{2};\frac{a+b}{2}\right)$ là tâm đối xứng của (C). Tính $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.



A. $\frac{5b-a}{2}$. **B.** $\frac{a-b}{2}$. **C.** $\frac{b-a}{2}$. **D.** $\frac{-a}{2}$.

Câu 34. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên A có bốn chữ số. Gọi N là số thỏa mãn $3^N = A$. Xác suất để N là số tự nhiên bằng:

A. $\frac{1}{4500}$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2500}$. **D.** $\frac{1}{3000}$.

Câu 35. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. Gọi M là trung điểm của AA'; N thuộc cạnh BB' sao cho $NB = 4NB'$ và P thuộc cạnh CC' sao cho $PC = 3PC'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P theo V bằng

A. $\frac{101}{180}V$. **B.** $\frac{5}{8}V$. **C.** $\frac{41}{60}V$. **D.** $\frac{5}{7}V$.

B. ĐIỀN KHUYẾT (15 CÂU)

Câu 36. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3x^2$ tại điểm M có tung độ bằng 5 có phương trình là:

Đáp án: ………….

Câu 37. Số cực trị của hàm số $y = -x^4 + 3x^2 + 3$ là.

Đáp án: ………….

Câu 38. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ và điểm $M(1; -2; 2)$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).

Đáp án: ………….

Câu 39. Một thí sinh phải chọn 10 trong số 20 câu hỏi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 10 câu hỏi này nếu 3 câu đầu phải được chọn:

Đáp án: ………….

Câu 40. Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x) - 15}{x - 3} = 12$. Tính $T = \lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt[3]{5f(x) - 11} - 4}{x^2 - x - 6}$.

Đáp án: ………….

Câu 41. Xác định parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ biết: (P) đi qua $M(4;3)$ cắt Ox tại $N(3;0)$ và P sao cho ΔINP có diện tích bằng 1 biết hoành độ điểm P nhỏ hơn 3, với I là đỉnh của (P).

Đáp án: ………….

Câu 42. Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - (m-1)x^2 + 1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu là:

Đáp án: ………….

Câu 43. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành do hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = 3 - x^2$ và $y = x^2 - 2x - 1$ quay quanh trục Ox (tính gần đúng đến 2 chữ số thập phân).

Đáp án: ………….

Câu 44. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-2;4\right]$. Bảng biến thiên của hàm $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$?

x	-2		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	6

Đáp án: ………….

Câu 45. Cho số phức $w=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2$ biết rằng $\left|z-1\right|=2$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w

Đáp án: ………….

Câu 46. Cho tứ diện đều $ABCD$ có M là trung điểm của cạnh CD, gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AM và BC. Giá trị $\cos\varphi$ bằng

Đáp án: ………….

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P):x+2y+z+1=0$ và $(Q):2x-y+2z+4=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Q) nằm trên trục hoành. Tung độ của điểm M bằng:

Đáp án: ………….

Câu 48. Cho $P=9\log_{\frac{1}{3}}^{3}\sqrt[3]{a}+\log_{\frac{1}{3}}^{2}a-\log_{\frac{1}{3}}a^{3}+1$ với $a\in\left[\frac{1}{27};3\right]$ và M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P. Tính $S=4M-3m$.

Đáp án: ………….

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB=a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $\left(ABC\right)$. Lấy M thuộc SC sao cho $CM=2MS$. Khoảng cách giữa hai đường AC và BM là

Đáp án: ………….

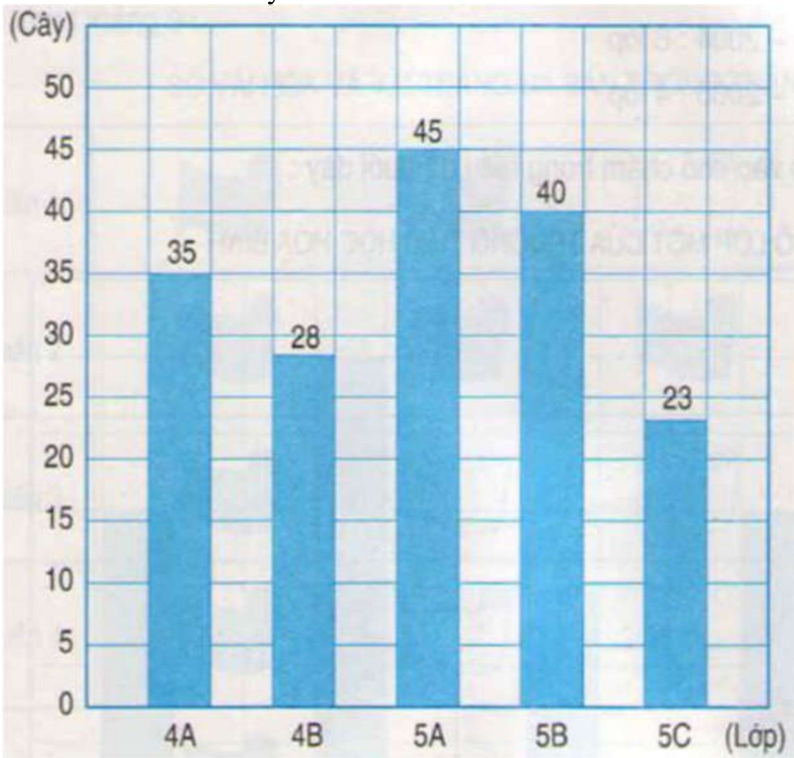
Câu 50. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc cạnh BC, BD sao cho $\left(AMN\right)$ luôn vuông góc với mặt phẳng $\left(BCD\right)$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$. Tính V_1+V_2.

Đáp án: ………….

Lời giải tham khảo

A. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (35 CÂU)

Câu 1. Nhìn vào biểu đồ trên hãy trả lời câu hỏi sau



Lớp 4A trồng được bao nhiêu cây?

A. 35. **B.** 45.

C. 28. **D.** 40

Lời giải

Chọn A

Câu 2. Một ô tô đang đứng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t)=6-3t\left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ô tô bắt đầu chuyển động. Hỏi quãng đường ô tô đi được kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là

A. $6\,(m)$. **B.** $12\,(m)$. **C.** $8\,(m)$. **D.** $10\,(m)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $v(t)=\int a(t)\,\mathrm{d}t=\int(6-3t)\,\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}t^2+6t+C\,(m/s)$.

Do ban đầu ô tô đang dừng nên $v(0)=0\Rightarrow C=0$.

Suy ra $v(t)=-\frac{3}{2}t^2+6t\,(m/s)$.

$v'(t)=-3t+6$; $v'(t)=0\Leftrightarrow t=2$.

Lập bảng biến thiên suy ra vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow t=2$.

Từ đó suy ra quãng đường ô tô đi được kể từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ô tô đạt giá trị lớn nhất là $S=\int_0^2\left(-\frac{3}{2}t^2+6t\right)\mathrm{d}t=8\,(m)$.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\log_2(1-x)=2$ là:

A. $x=5$. **B.** $x=-4$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2(1-x)=2\Leftrightarrow 1-x=4\Leftrightarrow x=-3$.

Câu 4. Gọi $(x;y)$ là nghiệm dương của hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\\ x^2+y^2=128\end{cases}$. Tổng $x+y$ bằng

A. 12. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x+y\ge 0\\ x-y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x\ge y\\ x\ge -y\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 & (1)\\ x^2+y^2=128 & (2)\end{cases}$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x^2-y^2}=16\Leftrightarrow\sqrt{x^2-y^2}=8-x\Leftrightarrow\begin{cases}8-x\ge 0\\ x^2-y^2=(8-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 8\\ y^2=16x-64 & (3)\end{cases}$

Thế (3) vào (2) ta được: $x^2+16x-64=128\Leftrightarrow x^2+16x-192=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8\\ x=-24\end{array}\right.\Leftrightarrow x=8$ (vì $x\ge 0$).

$\Rightarrow y^2=64\Leftrightarrow y=\pm 8.$

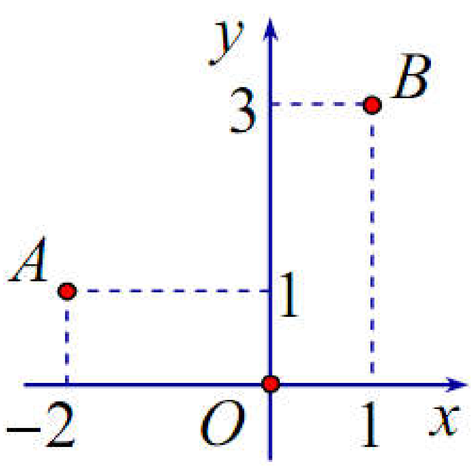
$\Rightarrow$Nghiệm dương của hệ là $(x;y)=(8;8)\Rightarrow x+y=16.$

Câu 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm A,B như hình vẽ bên. Trung điểm của đoạn thẳng AB biểu diễn số phức.

A. $2-i$. **B.** $2-\frac{1}{2}i$. **C.** $-\frac{1}{2}+2i$. **D.** $-1+2i$.

Lời giải

Chọn C



Trung điểm AB là $I\left(-\frac{1}{2};2\right)$, biểu diễn số phức $-\frac{1}{2}+2i$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $M(1;3;2)$, $N(5;2;4)$, $P(2;-6;-1)$ có dạng $Ax+By+Cz+D=0$. Tính tổng $S=A+B+C+D$.

A. $S=1$. **B.** $S=6$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=-3$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{MN}=(4;-1;2)$; $\overrightarrow{MP}=(1;-9;-3)$

$\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(21;14;-35)$ $\Rightarrow \vec{n}=(3;2;-5)$ là vectơ pháp tuyến của (MNP)

Phương trình $(MNP): 3x+2y-5z+1=0$

$\Rightarrow A+B+C+D=1$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc mặt phẳng (P) tại điểm H. Tìm tọa độ điểm H.

A. $H(3;0;2)$. **B.** $H(-3;0;-2)$. **C.** $H(-1;4;4)$ **D.** $H(1;-1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Điểm H cần tìm chính là hình chiếu vuông góc của tâm I lên mặt phẳng (P). Phương trình tham số đường thẳng IH là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2y \\ z=3-t \end{cases}$.

Thay tọa độ H vào phương trình mặt phẳng (P) ta có:

$2(1+2t)-2(2-2t)-3+t-4=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(3;0;2).$

Câu 8. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(x^2-5x+4\right)\sqrt{x^2-9}\le 0$ là

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

ĐKXĐ: $x^2-9\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x\le -3 \end{array}\right.$.

Khi đó $\left(x^2-5x+4\right)\sqrt{x^2-9}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-9}=0 \\ x^2-5x+4=0 \\ \begin{cases} x^2-9>0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \vee x=-3 \\ x=1 \vee x=4 \\ \begin{cases} x>3 \vee x<-3 \\ 1<x<4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \vee x=-3 \\ x=1 \vee x=4 \\ 3<x<4 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện: $x\in\{-3;3;4\}$ thỏa mãn.

Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 3.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(m^2+1\right)$ vô nghiệm.

A. $m\in(-\infty;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $m\in[-1;1]$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow 1^2+1^2<\left[\sqrt{2}\left(m^2+1\right)\right]^2$.

$\Leftrightarrow m^4+2m^2>0 \Leftrightarrow m^2\left(m^2+2\right)>0 \Leftrightarrow m^2>0 \Leftrightarrow m\ne 0.$

Câu 10. Bạn A thả quả bóng cao su từ độ cao $10\,\text{m}$ theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng có độ cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.

A. $80\,\text{m}$. **B.** $40\,\text{m}$. **C.** $70\,\text{m}$. **D.** $50\,\text{m}$.

Lời giải

Chọn C

Các quãng đường khi bóng đi xuống tạo thành một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 10$ và $q = \frac{3}{4}$.

Tổng các quãng đường khi bóng đi xuống là $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{10}{1-\frac{3}{4}} = 40$.

Tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn $2S - 10 = 70$.

Câu 11. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x-1}{x^2+2x+1}$ biết $F(1) = \frac{1}{3}$.

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{3}$ **B.** $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}$

C. $F(x) = x^2 + x + \frac{2}{x+1} - \frac{8}{3}$ **D.** $F(x) = x^2 + x - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{3}$

Lời giải

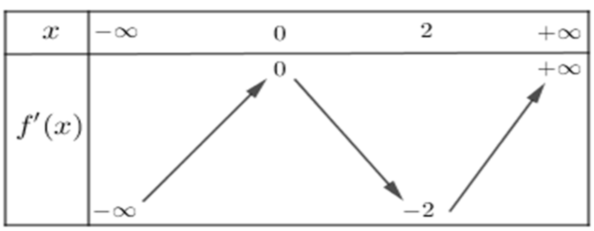
Chọn B

Chia đa thức: $x^3+3x^2+3x-1 = (x^2+2x+1)(x+1) - 2$

$\Rightarrow f(x) = x+1+\frac{-2}{x^2+2x+1} = x+1-\frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow F(x) = \int f(x).dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + C$

Mà $F(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = \frac{-13}{6}$. Vậy $\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(-2) = m+1, f(1) = m-2$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{1}{2}f(x) - \frac{2x+1}{x+3} \le m$ có nghiệm $x \in [-2;1]$ là:

A. $\left(-5;-\frac{7}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-2;7)$. **D.** $\left[-\frac{7}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình $g(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{2x+1}{x+3} \le m$ có nghiệm $x \in [-2;1] \Leftrightarrow \min\limits_{[-2;1]} g(x) \le m$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{2x+1}{x+3}$. Ta có $g'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{5}{(x+3)^2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ ta có $f'(x)\le 0,\forall x\in(-2;1)$ và $-\dfrac{5}{(x+3)^2}<0,\forall x\in(-2;1)$. Do đó $g'(x)<0,\forall x\in(-2;1)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-2;1)\Rightarrow \min\limits_{[-2;1]} g(x)=g(1)$.

Vậy $g(1)\le m\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}f(1)-\dfrac{3}{4}\le m\Leftrightarrow \dfrac{m-2}{2}-\dfrac{3}{4}\le m\Leftrightarrow -\dfrac{7}{2}\le m$.

Câu 13. Một vật đang chuyển động với vận tốc $10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=2t+\dfrac{1}{3}t^2\ \ (\text{m/s}^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi quãng đường vật đi được trong thời gian 12 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu mét?

A. $1272\ (m)$. **B.** $456\ (m)$. **C.** $1172\ (m)$. **D.** $1372\ (m)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $v(t)=\int\left(2t+\dfrac{1}{3}t^2\right)\text{dt}=t^2+\dfrac{t^3}{9}+C$.

Vận tốc ban đầu của chuyển động là $10\ (m/s)$ nên:

$v(0)=10\Leftrightarrow C=10\Rightarrow v(t)=t^2+\dfrac{t^3}{9}+10\ (m/s)$.

Do đó quãng đường vật đi được trong thời gian 12 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là:

$s=\int\limits_0^{12}\left(t^2+\dfrac{t^3}{9}+10\right)\text{dt}=1272\ (m)$.

Câu 14. Số lượng của một số loài vi khuẩn sau t (giờ) được xấp xỉ bởi đẳng thức $Q=Q_o.e^{0,195t}$, trong đó Q_o là số lượng vi khuẩn ban đầu. Nếu số lượng vi khuẩn ban đầu là 5000 con thì sau bao lâu có 100000 con?

A. 24. **B.** $15,36$. **C.** $3,55$. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

$Q=Q_oe^{0,195t}\Rightarrow 100\,000=5000e^{0,195t}\Rightarrow t=15,36$.

Câu 15. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2 x=4$

A. $S=\{2\}$. **B.** $S=\{16\}$. **C.** $S=\{8\}$. **D.** $S=\{6\}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Khi đó: $\log_2 x=4\Leftrightarrow x=2^4=16$

Vậy tập nghiệm là $S=\{16\}$.

Câu 16. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C): y=-x^2+4x$ và đường thẳng $(d): y=x$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay do hình phẳng (H) quay xung quanh trục hoành.

A. $V=\dfrac{108\pi}{10}$. **B.** $V=\dfrac{81\pi}{5}$. **C.** $V=\dfrac{108\pi}{5}$. **D.** $V=\dfrac{81\pi}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $-x^2+4x=x \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có $V=\pi\int\limits_0^3\left|\left(-x^2+4x\right)^2-x^2\right|\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^3\left|x^4-8x^3+15x^2\right|\mathrm{d}x=\dfrac{108\pi}{5}$.

Câu 17. Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 8 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 7

Lời giải

Chọn D

Có $y'=-3x^2-2mx+4m+9$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$y'=-3x^2-2mx+4m+9\le 0\ \ \forall\in(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3<0 \\ \Delta'=m^2+12m+27\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -9\le m\le -3$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3\}$.

Vậy có 7 giá trị thỏa mãn.

Câu 18. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1+i)z+(2-i)\overline{z}=13+2i$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. $(1+i)z+(2-i)\overline{z}=13+2i \Leftrightarrow (1+i)(a+bi)+(2-i)(a-bi)=13+2i$

$\Leftrightarrow (a-b)+(a+b)i+(2a-b)-(2b+a)i=13+2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b=13 \\ -b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow z=3-2i$.

Vậy có một số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19. Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa $|zi+1|=1$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

A. $I(1;0)$. **B.** $I(0;-1)$. **C.** $I(0;1)$. **D.** $I(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $|zi+1|=1 \Leftrightarrow |xi-y+1|=1 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1$. Vậy tâm của đường tròn là $I(0;1)$.

Câu 20. Cho đường thẳng Δ: $2x-y+1=0$ và một điểm $M(1,-2)$. Tọa độ hình chiếu H của điểm $M(1,-2)$ trên đường thẳng Δ là:

A. $H(1,-1)$. **B.** $H(-1,1)$. **C.** $H(-1,-1)$. **D.** $H(1,1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có đường thẳng d qua $M(1,-2)$ và vuông góc với đường thẳng Δ nên d nhận vectơ pháp tuyến của Δ làm vectơ chỉ phương. Suy ra: $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_\Delta}=(2,-1)\Rightarrow\overrightarrow{n_d}=(1,2)$.

Phương trình đường thẳng d có dạng: đường thẳng $1(x-1)+2(y+2)=0 \Leftrightarrow x+2y+3=0$.

Tọa độ hình chiếu H của điểm $M(1,-2)$ là nghiệm của hệ

$\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$.

Vậy tọa độ hình chiếu của điểm $M(1,-2)$ là $H(-1,-1)$.

Câu 21. Tìm bán kính đường tròn đi qua 3 điểm $A(0;0)$, $B(0;6)$, $C(8;0)$.

A. $\sqrt{5}$. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Gọi $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. $A,B,C\in(C)$ nên $\begin{cases}0+c=0\\36-12b+c=0\\64-16a+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=3\\c=0\end{cases}$.

Vậy bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}=5$

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Ox và cắt mặt cầu theo một đường tròn có chu vi bằng 6π..

A. $(P): 2y-z=0$. **B.** $(P): 3y-z=0$.
C. $(P): y-2z=0$. **D.** $(P): y-2z+1=0$.

Lời giải

Chọn C

Do mặt phẳng (P) chứa Ox nên loại đáp án

D.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=3$..

Đường tròn có chu vi bằng 6π nên $2\pi r=6\pi\Leftrightarrow r=3=R$. Do đó nó là đường tròn lớn của mặt cầu (S). Vậy mặt phẳng (P) đi qua tâm $I(1;-2;-1)$ của mặt cầu.

Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ là vectơ pháp tuyến của (P), suy ra $(P): by+cz=0$..

Do (P) đi qua tâm $I(1;-2;-1)$ nên $-2b-c=0\Rightarrow c=-2b$..

Khi đó $(P): by+cz=0\Leftrightarrow by-2bz=0\Leftrightarrow y-2z=0$..

Câu 23. Cho hình nón có bán kính đáy $r=\sqrt{3}$ và có độ dài đường sinh $l=4$. Tính thể tích khối nón đã cho.

A. $V=12\pi$. **B.** $V=4\pi$. **C.** $V=3\pi\sqrt{13}$. **D.** $V=\pi\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{4^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{13}$

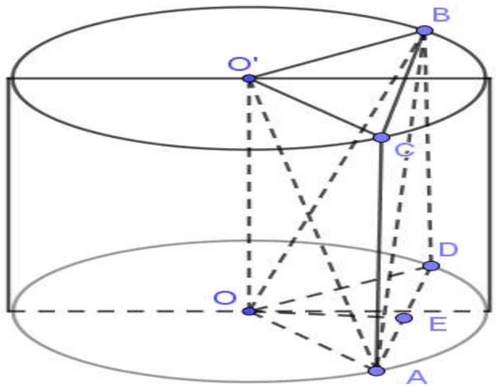
Thể tích của khối nón là: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.\left(\sqrt{3}\right)^2.\sqrt{13}=\pi\sqrt{13}$

Câu 24. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O, O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a, trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB=2a$. Thể tích tứ diện $OO'AB$ là

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng hình chữ nhật $ADBC$, ta có: $AD = a\sqrt{3}$, $OA = OD = a$, $OE = \frac{a}{2}$.

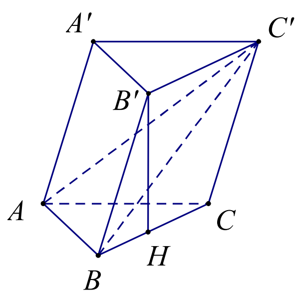
$V_{OO'AB} = \frac{1}{3}V_{OAD.O'CB} = \frac{1}{3}.S_{OAD}OO' = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AD.OE.OO' = \frac{1}{6}.a\sqrt{3}.\frac{a}{2}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 25. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với mặt đáy và $\widehat{B'BC} = 30^0$. Thể tích khối chóp $A.CC'B$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Có $\begin{cases}(BCC'B') \cap (ABC) = BC \\ (BCC'B') \perp (ABC)\end{cases}$. Từ B' hạ $B'H \perp BC$ suy ra $B'H \perp (ABC)$.

Theo đề bài ta có $BB' = 4a \Rightarrow B'H = BB'.\sin\widehat{B'BC} = 4a.\sin 30^0 = 2a$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = S_{ABC}.B'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $V_{A.CC'B} = \frac{1}{3}d\left(C';(ABC)\right).S_{ABC} = \frac{1}{3}d\left(B';(ABC)\right).S_{ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Hay thể tích khối chóp $A.CC'B$ là $\frac{1}{3}.\frac{a^3\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

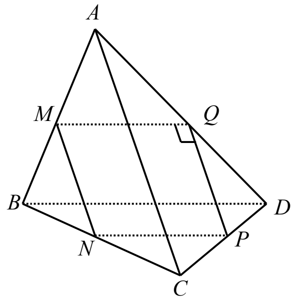
Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối vuông góc. Cắt tứ diện đó bằng một mặt phẳng song song với một cặp cạnh đối diện của tứ diện. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Thiết diện là hình bình hành. **B.** Thiết diện là hình thang.

C. Thiết diện là hình chữ nhật. **D.** Thiết diện là hình vuông.

Lời giải

Chọn C



Gỉa sử thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Ta có: $MN//PQ$ và $MN = PQ$ nên $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $AC \perp BD \Rightarrow MQ \perp PQ$

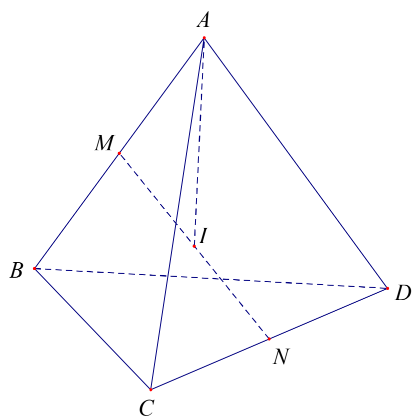
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(m;0;0)$, $B(0;m-1;0)$; $C(0;0;m+4)$ thỏa mãn $BC = AD$, $CA = BD$ và $AB = CD$. Giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{14}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$.

Gọi M, N lần lượt là trrung điểm của AB và CD.

Theo giả thiết ta có tam giác $\Delta ABC = \Delta CDA$ $(c.c.c) \Rightarrow CM = DM$ hay tam giác CMD cân tại M $\Rightarrow MN \perp CD$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $MN \perp AB$.

Gọi I là trung điểm của MN thì $IA = IB$ và $IC = ID$.

Mặt khác ta lại có $AB = CD$ nên $\Delta BMI = \Delta CNI$ $\Rightarrow IB = IC$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Ta có $IA^2 = IM^2 + AM^2 = \dfrac{MN^2}{4} + \dfrac{AB^2}{4} = \dfrac{MN^2 + c^2}{4}$.

Mặt khác CM là đường trung tuyến của tam giác ABC nên $CM^2 = \dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$

$\Rightarrow MN^2 = CI^2 - CN^2 = \dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4} - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$.

Vậy $IA^2 = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{8}$.

Với $a^2+b^2+c^2 = 2m^2 + 2(m-1)^2 + 2(m+4)^2 = 6(m+1)^2 + 28$

Vậy $IA^2 = \dfrac{6(m+1)^2+28}{8} \ge \dfrac{7}{2} \Rightarrow IA_{\min} = \sqrt{\dfrac{7}{2}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = y+1 = z-2$. Hình chiếu của d lên mặt phẳng (Oxy) là.

A. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1-t \\ z = 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = -1+t \\ z = 0 \end{cases}$.

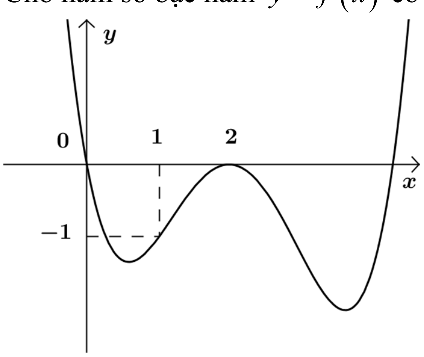
Lời giải

Chọn A

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 2+t \end{cases}$.

Do mặt phẳng $(Oxy): z = 0$ nên hình chiếu của d lên (Oxy) là $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 0 \end{cases}$.

Câu 29. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3x + 4)$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

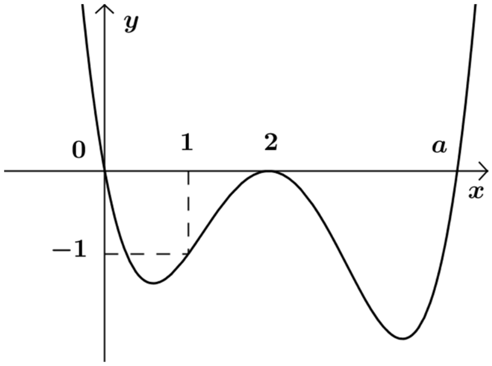
Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = (2x-3).f'(x^2-3x+4)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-3=0 & (1) \\ f'(x^2-3x+4)=0 & (2) \end{array}\right.$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.



Và $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+4=0 \text{ (vô nghiệm)} \\ x^2-3x+4=2 \text{ (PT nghiệm kép)} \\ x^2-3x+4=a,\ a>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x=2 \text{ (nghiệm kép)} \\ x=a_1 \\ x=a_2 \end{array}\right.$.

Do $a>2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq \frac{3}{2} \\ a_2 \neq \frac{3}{2} \end{cases}$, suy ra phương trình $g'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 30. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(9;-3;5)$, $B(a;b;c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng toạ độ (Oxy), (Oxz) và (Oyz). Biết M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM=MN=NP=PB$. Giá trị của tổng $a+b+c$ là:

A. 15. **B.** 21. **C.** -21. **D.** -15.

`Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $AB: \begin{cases} x=9+(9-a)t \\ y=-3+(-3-b)t \\ z=5+(5-c)t \end{cases}$.

Từ dữ kiện $M,N,P \in AB$ và $AM=MN=NP=PB$

$\Rightarrow N, M$, P lần lượt là trung điểm của AB, AN và BN

$\Rightarrow N\left(\frac{9+a}{2};\frac{-3+b}{2};\frac{5+c}{2}\right)$, $M\left(\frac{9+\frac{9+a}{2}}{2};\frac{-3+\frac{-3+b}{2}}{2};\frac{5+\frac{5+c}{2}}{2}\right)$,

$P\left(\frac{\frac{9+a}{2}+a}{2};\frac{\frac{-3+b}{2}+b}{2};\frac{\frac{5+c}{2}+c}{2}\right)$

Mà $\begin{cases} M \in (Oxy) \\ N \in (Oxz) \\ P \in (Oyz) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5+\dfrac{5+c}{2}}{2} = 0 \\ \dfrac{-3+b}{2} = 0 \\ \dfrac{\dfrac{9+a}{2}+a}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -15 \\ b = 3 \\ a = -3 \end{cases}$. Vậy $a+b+c=-15$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |f(x)+2m-1|$ có 5 điểm cực trị?

A. **2**. **B.** 4. **C.** 1. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y = |f(x)+2m-1| = \sqrt{(f(x)+2m-1)^2}$

$y' = \dfrac{f'(x).[f(x)+2m-1]}{\sqrt{(f(x)+2m-1)^2}}$.

$y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \quad (1) \\ f(x)+2m-1 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra:

+ Phương trình (1) có hai nghiệm $x=1;\ x=2$ và qua mỗi nghiệm đó y' đổi dấu, nên $x=1;\ x=2$ là hai điểm cực trị của hàm số.

+ Để hàm số $y = f(x)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (2) phải có 3 nghiệm phân biệt $x \neq 1;\ x \neq 2$. Khi đó $-5 < 1-2m < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 3$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x)+2m-1|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 32. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $2(x^2+2x)^2 - (4m-3)(x^2+2x)+1-2m = 0$ có đúng 3 nghiệm $\in [-3;0]$

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^2+2x\ (t \geq -1)$ ta có phương trình $2t^2-(4m-3)t+1-2m=0$ (1)

Phương trình (1) có 3 nghiệm thuộc đoạn $[-3;0]$ khi xảy ra 2 trường hợp sau:

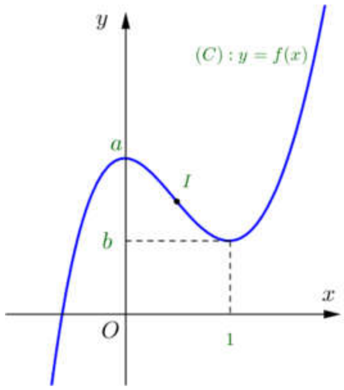
TH1: PT (1) có một nghiệm $t=-1$ và một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0]$. Khi đó $m=0$ (thỏa mãn)

TH2: PT (1) có 2 nghiệm thỏa mãn $-1 < t_1 < 0 < t_2 \leq 3$ (giả sử $t_1 < t_2$). Khi đó ta tìm được

$$\begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ m > 0 \\ m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < m \le 2.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ là hàm số bậc ba liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) như hình vẽ, trong đó $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{a+b}{2}\right)$ là tâm đối xứng của (C). Tính $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.



A. $\dfrac{5b-a}{2}$. **B.** $\dfrac{a-b}{2}$. **C.** $\dfrac{b-a}{2}$. **D.** $\dfrac{-a}{2}$.

Lời giải

Ta có $y = f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q, (m \ne 0)$

Từ đồ thị ta có $\begin{cases} y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{a+b}{2} \\ y(1) = b \\ y(0) = a \\ y'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2n+4p+8q = 4a+4b \\ m+n+p+q = b \\ q = a \\ 3m+2n+p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(a-b) \\ n = -3(a-b) \\ p = 0 \\ q = a \end{cases}$

Từ giải thiết ta có $y = f(x) = 2(a-b)x^3 - 3(a-b)x^2 + a \quad (a > b)$

$$J = \int_0^1 x.f'(x)dx = x.f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x).dx$$

$$= b - \left[\left(\dfrac{a-b}{2}\right)x^4 - (a-b)x^3 + ax\right]\Bigg|_0^1 = \dfrac{b-a}{2}$$

Vậy $\int_0^1 x \cdot f'(x)dx = \dfrac{b-a}{2}$

Câu 34. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên A có bốn chữ số. Gọi N là số thỏa mãn $3^N = A$. Xác suất để N là số tự nhiên bằng:

A. $\dfrac{1}{4500}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2500}$. **D.** $\dfrac{1}{3000}$.

Lời giải

Chọn A

Ký hiệu B là biến cố lấy được số tự nhiên A thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có: $3^N = A \Leftrightarrow N = \log_3 A$.

Để N là số tự nhiên thì $A = 3^m$ $(\mathrm{m} \in \mathbb{N})$.

Những số A dạng có 4 chữ số gồm $3^7 = 2187$ và $3^8 = 6561$

$n(\Omega) = 9000;\ \ n(B) = 2$

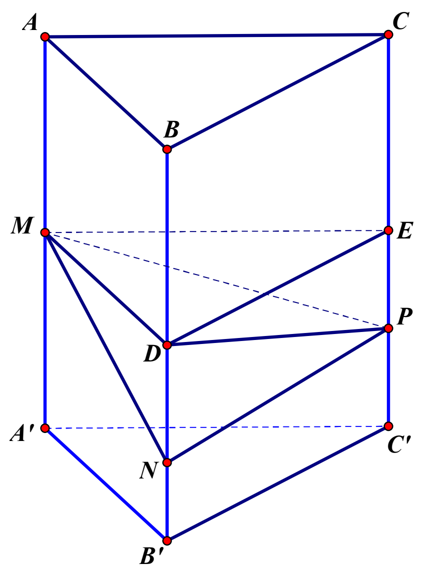
Suy ra: $P(B)=\dfrac{1}{4500}$.

Câu 35. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. Gọi M là trung điểm của AA'; N thuộc cạnh BB' sao cho $NB=4NB'$ và P thuộc cạnh CC' sao cho $PC=3PC'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P theo V bằng

A. $\dfrac{101}{180}V$. **B.** $\dfrac{5}{8}V$. **C.** $\dfrac{41}{60}V$. **D.** $\dfrac{5}{7}V$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1. Tự luận

Gọi D,E lần lượt là trung điểm của BB',CC'.

Ta có $V_{ABCMNP}=V_{ABCMDE}+V_{M.DEPN}=\dfrac{1}{2}V+V_{M.DEP}+V_{M.PDN}$.

$DN=DB'-NB'=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\right)BB'=\dfrac{3}{10}BB'\Rightarrow S_{PDN}=\dfrac{3}{20}S_{BCC'B'}$

$\Rightarrow V_{M.DPN}=\dfrac{1}{3}d\left(M,(BCC'B')\right).S_{PDN}=\dfrac{1}{3}d\left(A,(BCC'B')\right).\dfrac{3}{20}S_{BCC'B'}=\dfrac{3}{20}V_{A.BCC'B'}=\dfrac{3}{20}.\dfrac{2}{3}V=\dfrac{1}{10}V.$

$EP=EC'-PC'=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)CC'=\dfrac{1}{4}CC'\Rightarrow S_{DEP}=\dfrac{1}{8}S_{BCC'B'}$

$\Rightarrow V_{M.DEP}=\dfrac{1}{3}d\left(M,(BCC'B')\right).S_{DEP}=\dfrac{1}{3}d\left(A,(BCC'B')\right).\dfrac{1}{8}S_{BCC'B'}=\dfrac{1}{8}V_{A.BCC'B'}=\dfrac{1}{8}.\dfrac{2}{3}V=\dfrac{1}{12}V.$

Vậy $V_{ABCMNP}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{12}\right)V=\dfrac{41}{60}V.$

Cách 2: Dùng công thức giải nhanh

Ta có: $\dfrac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{AM}{AA'}+\dfrac{BN}{BB'}+\dfrac{CP}{CC'}\right)\Rightarrow V_{ABC.MNP}=\dfrac{V}{3}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{41}{60}V$.

B. ĐIỀN KHUYẾT (15 CÂU)

Câu 36. . Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2x^3+3x^2$ tại điểm M có tung độ bằng 5 có phương trình là:

Đáp án: ………….

Lời giải

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của của phương trình: $2x^3+3x^2=5 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có: $y'=6x^2+6x \Rightarrow y'(1)=12$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=12(x-1)+5=12x-7 \Leftrightarrow y=12x-7$.

Câu 37. Số cực trị của hàm số $y=-x^4+3x^2+3$ là.

Đáp án: ………….

Lời giải

$y'=-4x^3+6x$

$y'=0 \Leftrightarrow -4x^3+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{array}\right.$.

Qua 3 nghiệm đạo hàm đổi dấu, suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 38. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$ và điểm $M(1;-2;2)$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).

Đáp án: ………….

Lời giải

$d(M,(P))=\dfrac{|1+2.(-2)-2.2+1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2$.

Câu 39. Một thí sinh phải chọn 10 trong số 20 câu hỏi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 10 câu hỏi này nếu 3 câu đầu phải được chọn:

Đáp án: ………….

Lời giải

Thí sinh chỉ phải chọn 7 câu trong 17 câu còn lại. Vậy có C_{17}^7 cách chọn.

Câu 40. Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-15}{x-3}=12$. Tính $T=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{5f(x)-11}-4}{x^2-x-6}$.

Đáp án: ………….

Lời giải

Do $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-15}{x-3}=12 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}f(x)=15$

$T=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{5f(x)-11}-4}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5f(x)-11-64}{(x-3)(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{5f(x)-11}\right)^2+2\sqrt[3]{5f(x)-11}+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5(f(x)-15)}{(x-3)}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{5f(x)-11}\right)^2+4\sqrt[3]{5f(x)-11}+16\right)}=5.12.\dfrac{1}{5(4^2+4.4+16)}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 41. Xác định parabol (P): $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ biết: (P) đi qua $M(4;3)$ cắt Ox tại $N(3;0)$ và P sao cho ΔINP có diện tích bằng 1 biết hoành độ điểm P nhỏ hơn 3, với I là đỉnh của (P).

Đáp án: ………….

Lời giải

Vì (P) đi qua $M(4;3)$ nên $3=16a+4b+c$ (1)

Mặt khác (P) cắt Ox tại $N(3;0)$ suy ra $0=9a+3b+c$(2),

(P) cắt Ox tại P nên $P(t;0)$, $t<3$

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} t+3=-\dfrac{b}{a} \\ 3t=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

Ta có $S_{\Delta IBC}=\dfrac{1}{2}IH.NP$ với H là hình chiếu của $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ lên trục hoành

Do $IH=\left|-\dfrac{\Delta}{4a}\right|$, $NP=3-t$ nên $S_{\Delta INP}=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{\Delta}{4a}\right|.(3-t)=1$

$\Leftrightarrow (3-t)\left|\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{c}{a}\right|=\left|\dfrac{2}{a}\right| \Leftrightarrow (3-t)\left|\dfrac{(t+3)^2}{4}-3t\right|=\left|\dfrac{2}{a}\right| \Leftrightarrow (3-t)^3=\dfrac{8}{|a|}$ (3)

Từ (1) và (2) ta có $7a+b=3 \Leftrightarrow b=3-7a$ suy ra $t+3=-\dfrac{3-7a}{a} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}=\dfrac{4-t}{3}$

Thay vào (3) ta có: $(3-t)^3=\dfrac{8(4-t)}{3} \Leftrightarrow 3t^3-27t^2+73t-49=0 \Leftrightarrow t=1$

Suy ra $a=1 \Rightarrow b=-4 \Rightarrow c=3$.Vậy (P) cần tìm là $y=x^2-4x+3$.

Câu 42. Cho hàm số $y=(m+1)x^4-(m-1)x^2+1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu là:

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Trường hợp $m=-1$, suy ra $y=2x^2+1 \Rightarrow$ Hàm số có điểm cực tiểu mà không có điểm cực đại nên loại $m=-1$.

Trường hợp $m\neq -1$

Ta có: $y'=4(m+1)x^3-2(m-1)x=2x\left[2(m+1)x^2-(m-1)\right]$

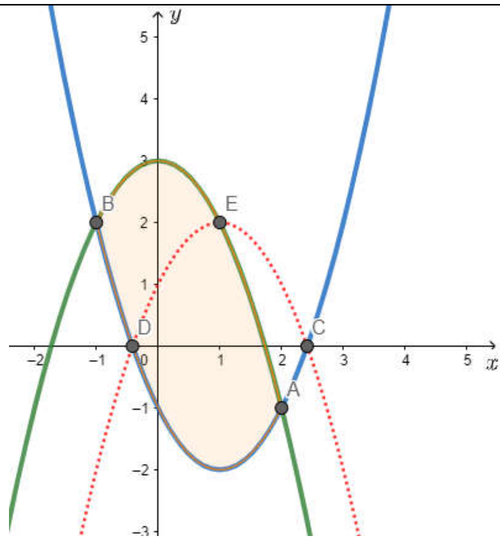
Xét $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ g(x)=2(m+1)x^2-(m-1)=0(*) \end{array}\right.$

Vì hàm trùng phương luôn đạt cực trị tại điểm $x=0$ nên để hàm số có một điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì $\begin{cases} m+1<0 \\ -m+1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \\ m\ge 1 \end{cases}$, suy ra không tồn tại m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 43. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành do hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=3-x^2$ và $y=x^2-2x-1$ quay quanh trục Ox (tính gần đúng đến 2 chữ số thập phân).

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải



Đồ thị hàm số $y=3-x^2$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $x=\pm\sqrt{3}$.

Đồ thị hàm số $y=x^2-2x-1$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ $x=1\pm\sqrt{2}$.

Hai đồ thị hàm số $y=3-x^2$ và $y=x^2-2x-1$ cắt nhau tại điểm có hoành độ là $x=-1$ và $x=2$.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành do hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị trên là :

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(3-x^2\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int_{1}^{2}\left(x^2-2x-1\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_{-1}^{1-\sqrt{2}}\left(x^2-2x-1\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(3-x^2\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{77}{15}+\frac{32}{15}\sqrt{2}+\frac{24}{5}\sqrt{3}\right)\pi\simeq 51,72.$$

Câu 44. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-2;4\right]$. Bảng biến thiên của hàm $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$?

x	-2		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	6

Đáp án: ....

Lời giải

Đặt $t=-2x+1$ với $t\in\left[-2;4\right]$, (vì $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$). Ta được:

$3f\left(t\right)=\left(1-t\right)^3-3\left(1-t\right)+m\Leftrightarrow 3f\left(t\right)-\left[\left(1-t\right)^3-3\left(1-t\right)\right]=m$.

Ta có: $g\left(t\right)=3f\left(t\right)-\left[\left(1-t\right)^3-3\left(1-t\right)\right]\Rightarrow g'\left(t\right)=3\left[f'\left(t\right)+t^2-2t\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.$.

Xét $h\left(t\right)=t^2-2t, t\in\left[-2;4\right]$, ta có: $h'\left(t\right)=2t-2; h'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=1$.

t	-2		0		1		2		4
$h'(t)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(t)$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	8

Khi đó

t	-2		0		2		4
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\nearrow$	8	$\searrow$	1	$\nearrow$	

Do đó phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1 < m < 8$.

Vì m là số nguyên nên $m \in \{2;3;4;5;6;7\}$.

Câu 45. Cho số phức $w = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + 2$ biết rằng $|z-1| = 2$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w

Đáp án: ....

Lời giải

Đặt $w = a + bi\left(a, b \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow z = \dfrac{a-2+bi}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{a-2+b\sqrt{3}}{4} - \dfrac{a\sqrt{3}-b-2\sqrt{3}}{4}i$.

Theo giả thiết $|z-1| = 2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{a-6+b\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}-b-2\sqrt{3}}{4}\right)^2 = 4$.

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 6a - 2\sqrt{3}b - 4 = 0$.

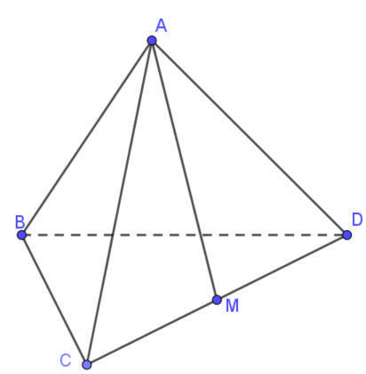
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn.

Câu 46. Cho tứ diện đều $ABCD$ có M là trung điểm của cạnh CD, gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AM và BC. Giá trị $\cos\varphi$ bằng

Đáp án: ....

Lời giải

Giả sử cạnh của tứ diện đều bằng a.



Vì M là trung điểm của CD. Nên AM là đường cao trong ΔACD đều. Do đó: $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có:

$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CB}.\left(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$

$=CB.CM.\cos\widehat{BCM}-CB.CA.\cos\widehat{ACB}$

$=a.\dfrac{a}{2}.\cos 60^o-a.a.\cos 60^o=-\dfrac{a^2}{4}$

Do đó, $\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AM}\right)=\dfrac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{AM}\right|}=\dfrac{\dfrac{-a^2}{4}}{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{6}$. Suy ra $\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AM}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P):x+2y+z+1=0$ và $(Q):2x-y+2z+4=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Q) nằm trên trục hoành. Tung độ của điểm M bằng:

Đáp án: $\boxed{\text{.............}}$

Lời giải

Gọi A là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Q) vì $A\in Ox$ nên ta có $A(a;0;0)$.

Phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với (Q) có dạng $d:\begin{cases}x=a+2t\\y=-t\\z=2t\end{cases}\quad\left(t\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có $(Q)\cap d=I$, $I\in d$ nên $I(a+2t;-t;2t)$. Mặt khác $I\in(Q)$ nên $2(a+2t)+t+4t+4=0$

$t=\dfrac{-4-2a}{9}$. Nên $I\left(a+2.\dfrac{-4-2a}{9};\dfrac{4+2a}{9};\dfrac{-8-4a}{9}\right)$

$\Rightarrow M\left(2a+4.\dfrac{-4-2a}{9}-a;\dfrac{8+4a}{9};\dfrac{-16-8a}{9}\right)$.

$M\in(P)\Rightarrow 2a+4.\dfrac{-4-2a}{9}-a+2.\dfrac{8+4a}{9}+\dfrac{-16-8a}{9}+1=0$

$\Leftrightarrow 9a-16-8a+16+8a-16-8a+9=0$

$\Leftrightarrow a=7$. Vậy $M\left(-1;4;-8\right)$.

Câu 48. Cho $P=9\log_{\frac{1}{3}}^3\sqrt[3]{a}+\log_{\frac{1}{3}}^2 a-\log_{\frac{1}{3}} a^3+1$ với $a\in\left[\dfrac{1}{27};3\right]$ và M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P. Tính $S=4M-3m$.

Đáp án: $\boxed{\text{.............}}$

Lời giải

Ta có: $P=-\dfrac{1}{3}\log_3^3 a+\log_3^2 a+3\log_3 a+1$.

Đặt $t=\log_3 a$. Do $a\in\left[\dfrac{1}{27};3\right]$ nên $t\in\left[-3;1\right]$.

Khi đó: $P=-\dfrac{1}{3}t^3+t^2+3t+1$ với $t\in\left[-3;1\right]$.

$P'\left(t\right)=-t^2+2t+3$. $P'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\left(L\right)\\t=-1\left(N\right)\end{array}\right.$

Ta có $P\left(-3\right)=10$, $P\left(-1\right)=-\dfrac{2}{3}$, $P\left(1\right)=\dfrac{14}{3}$ $\Rightarrow M=10$, $m=-\dfrac{2}{3}$.

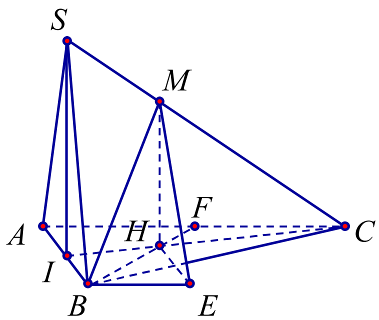
Vậy $S=4M-3m=42$.

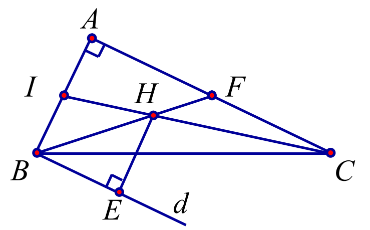
Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Lấy M thuộc SC sao cho $CM = 2MS$. Khoảng cách giữa hai đường AC và BM là

Đáp án: ………….

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB suy ra $SI \perp (ABC)$.





Gọi H là hình chiếu của M trên (ABC), Trong (ABC) từ B dựng đường thẳng $d \,//\, AC$.

Gọi F là trung điểm của AC, E là hình chiếu của H trên d, ta có:

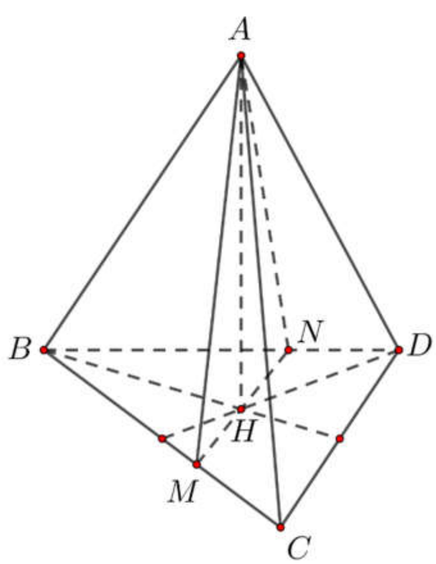
$MH = \frac{2}{3}SI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $HE = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}$.

Khi đó $d(BM, AC) = \frac{3}{2}d(H,(BME)) = \frac{3}{2}\frac{MH.HE}{\sqrt{MH^2 + HE^2}} = \frac{3}{2}\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{2a}{3}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Câu 50. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc cạnh BC, BD sao cho (AMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (BCD). Gọi V_1, V_2 lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$. Tính $V_1 + V_2$.

Đáp án: ………….

Lời giải



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD,

Ta có $AH \perp (BCD)$, mà $(AMN) \perp (BCD)$ nên $AH \subset (AMN)$ hay MN luôn đi qua H.

Ta có $BH=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Thể tích khối chóp $ABMN$ là $V=\frac{1}{3}.AH.S_{BMN}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{1}{2}BM.BN.\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{2}}{12}BM.BN$.

Do MN luôn đi qua H và M chạy trên BC nên $BM.BN$ lớn nhất khi $M\equiv C$ hoặc $N\equiv D$ khi đó $V_1=\frac{\sqrt{2}}{24}$.

+ $BM.BN$ nhỏ nhất khi $MN//CD$ khi $BM=BN=\frac{2}{3}\Rightarrow V_2=\frac{\sqrt{2}}{27}$.

Vậy $V_1+V_2=\frac{17\sqrt{2}}{216}$.