

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1; 2; 3)$ và mặt phẳng (α) có phương trình là $x - 2y + z - 12 = 0$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) .

- A. $H(-1; 6; 1)$. B. $H(3; -2; 5)$. C. $H(5; -6; 7)$. D. $H(2; 0; 4)$.

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình: $\frac{(x-4)\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}} \leq 2$ là

- A. $(5; 6]$. B. $[5; 6]$. C. $(-\infty; 6]$. D. $(5; +\infty)$.

Câu 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$ có nghiệm?

- A. 4036. B. 2020. C. 4037. D. 2019.

Câu 10. Người ta thả một lá bèo vào một hồ nước. Sau thời gian 24 giờ bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng cứ sau mỗi giờ thì lượng lá bèo sẽ tăng gấp 10 lần lượng lá bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì số lá bèo sẽ phủ kín một nửa mặt hồ

- A. $\frac{24}{\log 2}$. B. 12. C. $\frac{10^{24}}{2}$. D. $24 - \log 2$.

Câu 11. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$. Khi đó

- A. $F(x) = \frac{2x^3}{3} + 3 \ln x + C$. B. $F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$.

- C. $F(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C$. D. $F(x) = \frac{2x^3}{3} - 3 \ln|x| + C$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} . Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới đây:

x	-1	1	3
$f'(x)$	1	3	2

Tìm m để bất phương trình $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$.

- A. $m < f(0)$. B. $m \leq f(0)$. C. $m \leq f(3)$. D. $m < f(1) - \frac{2}{3}$.

Câu 13. Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian t (s) là $a(t) = 2t - 7$ (m/s^2). Biết vận tốc đầu bằng 10 (m/s), hỏi sau bao lâu thì chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s)?

- A. 5 (s). B. 7 (s). C. 6 (s). D. 8 (s).

Câu 14. Hai anh em An Bình và An Nhiên sau Tết có 3000000 (đồng) tiền mừng tuổi. Mẹ gửi ngân hàng cho hai anh em với lãi suất 0,5%/ tháng (sau mỗi tháng tiền lãi được nhập vào tiền gốc để tính lãi cho tháng sau). Hỏi sau một năm hai anh em được nhận bao nhiêu tiền biết trong một năm đó hai anh em không rút tiền lần nào (Kết quả được làm tròn đến hàng nghìn)?

- A. 3185000. B. 3183000. C. 3184000. D. 3186000.

Câu 15. Tìm số thực x biết $\log_3(2-x) = 2$.

- A. $x = -6$. B. $x = -4$. C. $x = -7$. D. $x = 6$.

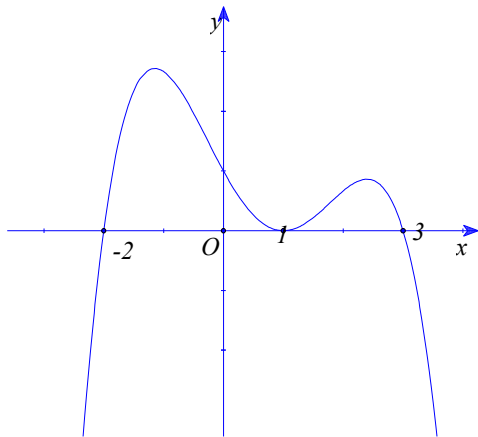
- Câu 16.** Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.
- A. $\frac{20\pi}{3}$. B. $\frac{4\pi}{3}$. C. $\frac{64\pi}{15}$. D. $\frac{16\pi}{15}$.
- Câu 17.** Hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ khi và chỉ khi:
- A. $m > 1$. B. $m \geq 2$. C. $m > 2$. D. $m \geq 1$.
- Câu 18.** Cho số phức z thỏa mãn $z + 2i\bar{z} = 1 + 17i$. Khi đó $|z|$ bằng
- A. $|z| = \sqrt{146}$. B. $|z| = 12$. C. $|z| = \sqrt{148}$. D. $|z| = \sqrt{142}$.
- Câu 19.** Tập hợp các điểm trong mặt phẳng biểu diễn cho số z phức thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = 4$ là:
- A. Một hình vuông. B. Một đường tròn. C. Một đoạn thẳng. D. Một đường thẳng.
- Câu 20.** Cho đường thẳng $d: 2x - 3y + 3 = 0$ và $M(8; 2)$. Tọa độ của điểm M' đối xứng với M qua d là:
- A. $(4; 8)$. B. $(4; -8)$. C. $(-4; 8)$. D. $(-4; -8)$.
- Câu 21.** Đường tròn $x^2 + y^2 - 5y = 0$ có bán kính bằng bao nhiêu?
- A. $\sqrt{5}$. B. 25. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{25}{2}$.
- Câu 22.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(0; -1; 2)$. Biết rằng có hai mặt phẳng cùng đi qua hai điểm A, O và cùng cách B một khoảng bằng $\sqrt{3}$. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây là một vectơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó.
- A. $\vec{n} = (1; -1; 5)$. B. $\vec{n} = (1; -1; -5)$. C. $\vec{n} = (1; -1; -1)$. D. $\vec{n} = (1; -1; -3)$.
- Câu 23.** Một hình nón có bán kính đường tròn đáy $r = 3cm$ và thể tích của khối nón được tạo nên từ hình nón là $V = 9\pi\sqrt{3}cm^3$. Tính góc ở đỉnh của hình nón đó.
- A. 45° . B. 30° . C. 120° . D. 60° .
- Câu 24.** Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') , chiều cao $R\sqrt{3}$ và bán kính đáy R . Một hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn $(O; R)$. Tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng
- A. 3. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{3}$.
- Câu 25.** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng?
- A. $V = 6$. B. $V = 8$. C. $V = 12$. D. $V = 10$.
- Câu 26.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm lấy trên cạnh SA (M không trùng với S và A). $Mp(\alpha)$ qua ba điểm M, B, C cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là:
- A. Tam giác. B. Hình thang. C. Hình bình hành. D. Hình chữ nhật.
- Câu 27.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét đường thẳng d xác định bởi $\begin{cases} x = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ và đường thẳng d' xác định bởi $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$. Tính bán kính nhỏ nhất R của mặt cầu tiếp xúc cả hai đường thẳng d và d' .

- A. $R = \frac{1}{2}$. B. $R = 2$. C. $R = \sqrt{2}$. D. $R = 1$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu của đường thẳng $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$ trên mặt phẳng (Oxy) ?

- A. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+3t \\ z = 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-3t \\ z = 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+3t \\ z = 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = 0 \end{cases}$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực đại.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P) bằng

- A. $\frac{7\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{11\sqrt{2}}{6}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{11}}{18}$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = |f(x) + 2m - 1|$ có 5 điểm cực trị.

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 32. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình: $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x-1} + a = 0$ có đúng 4 nghiệm.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

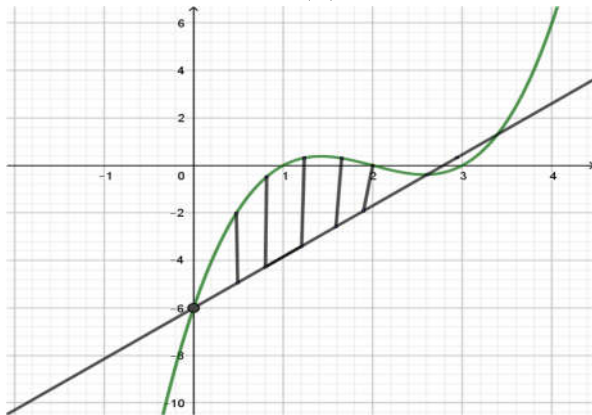
Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ dương và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết $y = f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{e^x \sqrt{f^2(x)+1}}{f(x)}$ và $f(\ln 2) = \sqrt{3}$ họ nguyên hàm của hàm số $e^{2x} \cdot f(x)$ là

- A. $\frac{2}{5} \sqrt{(e^x+1)^5} + \frac{2}{3} \sqrt{(e^x+1)^3} + C$. B. $\frac{1}{3} \sqrt{(e^{2x}-1)^3} - \sqrt{e^{2x}-1} + C$.
C. $\frac{1}{3} \sqrt{(e^{2x}-1)^3} + C$. D. $\frac{1}{3} \sqrt{(e^x-1)^3} + C$.

Câu 34. Một tiểu đội có 10 người được xếp ngẫu nhiên thành hàng dọc, trong đó có anh A và anh B . Tính xác suất để A và B đứng cạnh nhau.

Đáp án:

Câu 43. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng $d: y = kx - 6$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên k để $S_1 > S_2$ (trong đó S_1, S_2 là phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ và đường thẳng $y = kx - 6$, S_1 là phần gạch chéo).



Đáp án:

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
y'	$-$	\parallel	$+$	0	$-$	$+$
y	5			2		-1

Tính tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$$f(|x-1|+2) = f(\sqrt{3-m}+2) \text{ có nghiệm}$$

Đáp án:

Câu 45. Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (5-12i)z + 1 - 2i$ trong mặt phẳng Oxy là

Đáp án:

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa hai đường thẳng SC và BD nằm trong khoảng nào?

Đáp án:

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(Q): x + y - 2z + 9 = 0$.

Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 2; 3)$, vuông góc với (d) và song song với (Q) . Tính khoảng cách từ giao điểm của (d) và (Q) đến (Δ) ta được

Đáp án:

Câu 48. Cho các số thực m, n thỏa mãn $m > n > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{\min} của biểu thức

$$P = \log_{\frac{m}{n}}^2(m^2) + 3 \log_n \left(\frac{m}{n} \right).$$

Đáp án:

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $CD = a$, $SD \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB, AD và G là trọng tâm tam giác SAC . Mặt phẳng (GMN) cắt cạnh SC tại E . Khoảng cách từ E đến mặt phẳng (SAD) bằng

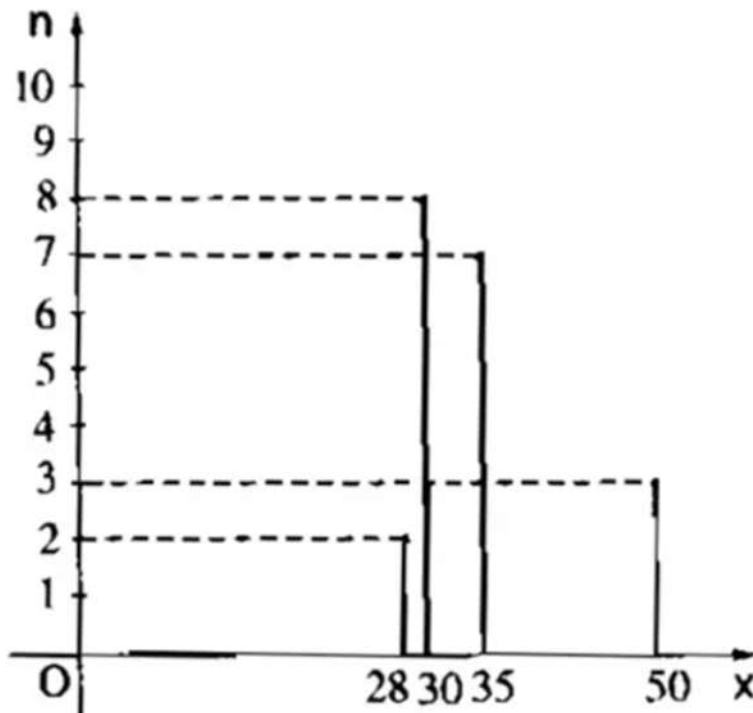
Đáp án:

Câu 50. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông. Biết tổng diện tích tất cả các mặt của khối hộp bằng 50. Tính thể tích lớn nhất V_{\max} của khối hộp đã cho.

Đáp án:

A. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (35 CÂU)

Câu 1. Dựa vào biểu đồ trên, hãy cho biết giá trị $x = 50$ thì giá trị n bằng bao nhiêu?



- A. 8. B. 5.
C. 2. D. 3

Lời giải

Chọn D

Câu 2. Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin \pi t}{\pi} (m/s)$. Quãng đường di chuyển của vật đó trong khoảng thời gian 1,5 giây chính xác đến 0,01 m là?

- A. 0.33. B. 0.31. C. 0.34. D. 0.32.

Lời giải

Chọn C

Quãng đường vật đi được trong 1,5 giây đầu tiên là.

$$s = \int_0^{1.5} v(t) dt = \left(\frac{t}{2\pi} \right) - \frac{\cos \pi t}{\pi^2} \Big|_0^{1.5} \approx 0,34 (m).$$

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq 0$ là

- A. (1;2). B. (1;2]. C. $(-\infty; 2]$. D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow (1;2].$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1;2]$.

Câu 4. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + m \end{cases}$ có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi:

- A. m tùy ý. B. $m = \sqrt{2}$.

C. $m = -\sqrt{2}$.

D. $m = \sqrt{2}$ và $m = -\sqrt{2}$.

Lời giải**Chọn D**

Thế $y = x + m$ vào phương trình $x^2 + y^2 = 1$ ta được $2x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$ (*) có $\Delta' = -m^2 + 2$. Hệ có nghiệm duy nhất \Leftrightarrow (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $z = z_1 + z_2$ (với $z_1 = 5 + 3i$ và $z_2 = 6 + 4i$ là điểm nào dưới đây?

A. $Q(11; 7)$.

B. $P(-1; -1)$.

C. $N(-11; -7)$.

D. $M(1; -1)$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có: $z = z_1 + z_2 = 5 + 3i + 6 + 4i = 11 + 7i$

Vậy điểm biểu diễn số phức z là $Q(11; 7)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1; 0; 2)$, $N(-3; -4; 1)$, $P(2; 5; 3)$. Mặt phẳng (MNP) có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\vec{n} = (3; -16; 1)$.

B. $\vec{n} = (1; 3; -16)$.

C. $\vec{n} = (1; -3; 16)$.

D. $\vec{n} = (-16; 1; 3)$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có $\overline{MN} = (-4; -4; -1)$; $\overline{MP} = (1; 5; 1)$.

$$\Rightarrow [\overline{MN}, \overline{MP}] = (1; 3; -16).$$

Vậy mặt phẳng (MNP) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 3; -16)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1; 2; 3)$ và mặt phẳng (α) có phương trình là $x - 2y + z - 12 = 0$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) .

A. $H(-1; 6; 1)$.

B. $H(3; -2; 5)$.

C. $H(5; -6; 7)$.

D. $H(2; 0; 4)$.

Lời giải**Chọn B**

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (α) . Suy ra d có 1 VTCP

$$\vec{u} = (1; -2; 1). \text{ Phương trình đường thẳng } d \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

H là hình chiếu của M lên $(\alpha) \Rightarrow H = d \cap (\alpha)$.

$$H \in d \Rightarrow H(1+t; 2-2t; 3+t).$$

$$H \in (\alpha) \Rightarrow (1+t) - 2(2-2t) + (3+t) - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow H(3; -2; 5).$$

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình: $\frac{(x-4)\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}} \leq 2$ là

A. $(5; 6]$.

B. $[5; 6]$.

C. $(-\infty; 6]$.

D. $(5; +\infty)$.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \frac{(x-4)\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}} \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x-4 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < x \leq 6.$$

Tập nghiệm của bất phương trình: $S = (5; 6]$.

- Câu 9.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$ có nghiệm?
A. 4036. B. 2020. C. 4037. D. 2019.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned}(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(m+1)}{2}(1 - \cos 2x) - \sin 2x + \cos 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow (m+1)(1 - \cos 2x) - 2\sin 2x + 2\cos 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow -2\sin 2x + (1-m)\cos 2x &= m+1\end{aligned}$$

Nên phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}4 + (1-m)^2 &\geq (m+1)^2 \\ \Leftrightarrow 4m \leq 4 &\Leftrightarrow m \leq 1\end{aligned}$$

Vậy có tất cả 2020 giá trị của tham số thỏa mãn đề bài.

- Câu 10.** Người ta thả một lá bèo vào một hồ nước. Sau thời gian 24 giờ bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng cứ sau mỗi giờ thì lượng lá bèo sẽ tăng gấp 10 lần lượng lá bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì số lá bèo sẽ phủ kín một nửa mặt hồ?
A. $\frac{24}{\log 2}$. B. 12. C. $\frac{10^{24}}{2}$. D. $24 - \log 2$.

Lời giải

Chọn D

Gọi diện tích mặt hồ là S và diện tích bề mặt 1 lá bèo là a .

Sau 1 giờ diện tích mặt hồ bị phủ là $10a$.

Sau 2 giờ diện tích mặt hồ bị phủ là $10a \cdot 10 = 10^2 a$.

...

Sau 24 giờ diện tích mặt hồ bị phủ là $10^{24} a$.

Theo giả thiết ta có $10^{24} a = S$.

$$\text{Suy ra } \frac{10^{24} a}{2} = \frac{S}{2} = 10^t a \Leftrightarrow 10^{24} = 2 \cdot 10^t \Leftrightarrow t = 24 - \log 2.$$

Do đó để lá bèo phủ kín một nửa mặt hồ cần thời gian là $24 - \log 2$.

- Câu 11.** Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$. Khi đó

A. $F(x) = \frac{2x^3}{3} + 3 \ln x + C$.

B. $F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$.

C. $F(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C$. D. $F(x) = \frac{2x^3}{3} - 3 \ln|x| + C$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{2x^4 + 3}{x^2} dx = \int \left(2x^2 + \frac{3}{x^2} \right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} . Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới đây:

x	-1	1	3
$f'(x)$	1	3	2

Tìm m để bất phương trình $m + x^2 \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$.

- A. $m < f(0)$. B. $m \leq f(0)$. C. $m \leq f(3)$. D. $m < f(1) - \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ycbt $\Leftrightarrow m \leq f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 3)$.

$\Leftrightarrow m \leq \min_{[0;3]} g(x)$ với $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ với $x \in (0; 3)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + x^2 - 2x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x^2 + 2x$.

Từ bảng biến thiên ta có $f'(x) > 1$ với $x \in (0; 3)$ và $-x^2 + 2x = 1 - (x-1)^2 \leq 1, \forall x \in (0; 3)$

$\Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (0; 3)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0; 3) \Rightarrow \min_{[0;3]} g(x) = g(0)$.

Vậy $m \leq g(0) = f(0) - \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 = f(0)$.

Câu 13. Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian t (s) là $a(t) = 2t - 7$ (m/s²). Biết vận tốc đầu bằng 10 (m/s), hỏi sau bao lâu thì chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s)?

- A. 5 (s). B. 7 (s). C. 6 (s). D. 8 (s).

Lời giải

Chọn D

Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int (2t - 7) dt = t^2 - 7t + C$, mặt khác $v(0) = 10$ nên $C = v(0) = 10$.

$\Rightarrow v(t) = t^2 - 7t + 10$.

Để chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s) thì $v(t) = 18 \Leftrightarrow t^2 - 7t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \text{ (nhận)} \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Vậy tại thời điểm $t = 8$ (s) thì chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s).

Câu 14. Hai anh em An Bình và An Nhiên sau Tết có 3000000 (đồng) tiền mừng tuổi. Mẹ gửi ngân hàng cho hai anh em với lãi suất 0,5% / tháng (sau mỗi tháng tiền lãi được nhập vào tiền gốc để tính lãi cho tháng sau). Hỏi sau một năm hai anh em được nhận bao nhiêu tiền biết trong một năm đó hai anh em không rút tiền lần nào (Kết quả được làm tròn đến hàng nghìn)?

- A. 3185000. B. 3183000. C. 3184000. D. 3186000.

Lời giải

Chọn A

Sau một năm hai anh em được nhận được số tiền là:

$$T = 3000000(1 + 0,5\%)^{12} = 3185033,436 \approx 3185000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 15. Tìm số thực x biết $\log_3(2-x) = 2$.

A. $x = -6$.

B. $x = -4$.

C. $x = -7$.

D. $x = 6$.

Lời giải

Chọn C

Đk: $x < 2$.

Ta có: $\log_3(2-x) = 2 \Leftrightarrow 2-x = 3^2 \Leftrightarrow x = -7$.

Câu 16. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

A. $\frac{20\pi}{3}$.

B. $\frac{4\pi}{3}$.

C. $\frac{64\pi}{15}$.

D. $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ ta có

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Do $x^2 - 2x < 0$ với $0 < x < 2$ nên $2x - x^2 > 0$ với $0 < x < 2$.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành thì

$$V = \pi \int_0^2 \left((2x)^2 - (x^2)^2 \right) dx = \pi \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{64\pi}{15}.$$

Câu 17. Hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ khi và chỉ khi:

A. $m > 1$.

B. $m \geq 2$.

C. $m > 2$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$.

Điều kiện xác định là $x \neq m$.

Đạo hàm $y' = \frac{1-m}{(x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 1-m < 0 \\ m \notin (-\infty; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 18. Cho số phức z thỏa mãn $z + 2i\bar{z} = 1 + 17i$. Khi đó $|z|$ bằng

A. $|z| = \sqrt{146}$.

B. $|z| = 12$.

C. $|z| = \sqrt{148}$.

D. $|z| = \sqrt{142}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$), khi đó ta có

$$z + 2i\bar{z} = 1 + 17i \Leftrightarrow (a + bi) + 2i(a - bi) = 1 + 17i$$

$$\Leftrightarrow (a+2b) + (2a+b)i = 1+17i \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=1 \\ 2a+b=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=11 \\ b=-5 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } |z| = \sqrt{11^2 + (-5)^2} = \sqrt{146}.$$

- Câu 19.** Tập hợp các điểm trong mặt phẳng biểu diễn cho số z phức thỏa mãn điều kiện $|z-1+2i|=4$ là:
A. Một hình vuông. **B.** Một đường tròn. **C.** Một đoạn thẳng. **D.** Một đường thẳng.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Giả sử } z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}; i^2 = -1).$$

$$|z-1+2i|=4 \Leftrightarrow |x+yi-1+2i|=4 \Leftrightarrow |x-1+(y+2)i|=4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 4.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16. \text{ Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức là một đường tròn.}$$

- Câu 20.** Cho đường thẳng $d: 2x-3y+3=0$ và $M(8; 2)$. Tọa độ của điểm M' đối xứng với M qua d là:

- A.** (4;8). **B.** (4;-8). **C.** (-4;8). **D.** (-4;-8).

Lời giải

Chọn A

Ta thấy hoành độ và tung độ của điểm M' chỉ nhận một trong 2 giá trị nên ta có thể làm như sau:

Đường thẳng d có 1 VTPT $\vec{n}(2; -3)$, Gọi $M'(x; y)$ thì $\overline{MM'}$ $(x-2; y+3)$

M' đối xứng với M qua d nên $\overline{MM'}$ $(x-2; y+3)$ và $\vec{n}(2; -3)$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-3} \Leftrightarrow x = \frac{28-2y}{3}$$

Thay $y=8$ vào ta được $x=4$

Thay $y=-8$ vào thấy không ra đúng $x=\pm 4$.

Cách 2:

+ ptdt Δ đi qua M và vuông góc với d là: $3(x-8)+2(y-2)=0 \Leftrightarrow 3x+2y-28=0$.

+ Gọi $H = d \cap \Delta \Rightarrow H(6; 5)$.

+ Khi đó H là trung điểm của đoạn MM' Áp dụng công thức trung điểm ta suy ra

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M = 12 - 8 = 4 \\ y_{M'} = 2y_H - y_M = 10 - 2 = 8 \end{cases}. \text{ Vậy } M'(4; 8).$$

- Câu 21.** Đường tròn $x^2 + y^2 - 5y = 0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

- A.** $\sqrt{5}$. **B.** 25. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đường tròn có tâm } I\left(0; \frac{5}{2}\right), \text{ bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{0 + \frac{25}{4} - 0} = \frac{5}{2}.$$

- Câu 22.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(0; -1; 2)$. Biết rằng có hai mặt phẳng cùng đi qua hai điểm A , O và cùng cách B một khoảng bằng $\sqrt{3}$. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây là một vectơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó.

- A.** $\vec{n} = (1; -1; 5)$. **B.** $\vec{n} = (1; -1; -5)$. **C.** $\vec{n} = (1; -1; -1)$. **D.** $\vec{n} = (1; -1; -3)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình đường thẳng qua hai điểm } A, O \text{ có dạng } \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Gọi (P) là mặt phẳng cùng đi qua hai điểm A, O nên $(P): m(x-y)+nz=0, m^2+n^2>0$. Khi đó vectơ pháp tuyến của (P) có dạng $\vec{n}=(m;-m;n)$.

$$\text{Ta có } d(B,(P))=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|m+2n|}{\sqrt{m^2+m^2+n^2}}=\sqrt{3} \Leftrightarrow 2m^2-4mn-n^2=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{n}=1 \\ \frac{m}{n}=\frac{1}{5} \end{cases}$$

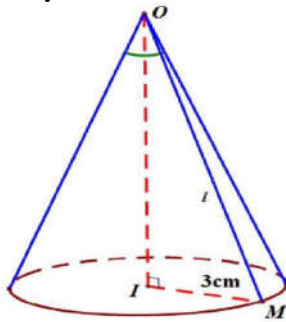
Vậy một vectơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó là $\vec{n}=\left(\frac{1}{5}n;-\frac{1}{5}n;n\right)=\frac{n}{5}(1;-1;5)$.

Câu 23. Một hình nón có bán kính đường tròn đáy $r=3\text{cm}$ và thể tích của khối nón được tạo nên từ hình nón là $V=9\pi\sqrt{3}\text{cm}^3$. Tính góc ở đỉnh của hình nón đó.

- A. 45° . B. 30° . C. 120° . D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Xét hình nón đỉnh O như hình vẽ. Gọi chiều cao hình nón là $h(\text{cm})$, đường sinh của hình nón là $l(\text{cm})$, góc ở đỉnh của hình nón là α .

$$\text{Thể tích hình nón } V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=9\pi\sqrt{3} \Rightarrow h=3\sqrt{3}\text{cm}.$$

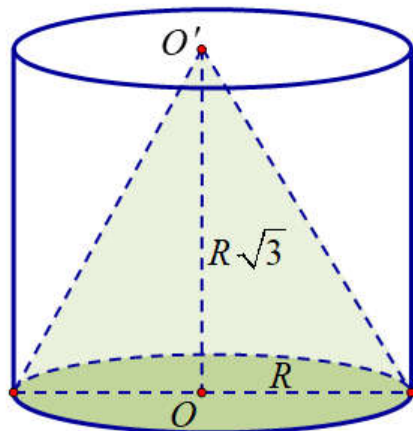
$$\text{Xét tam giác } OIM \text{ vuông tại } I: \tan \widehat{IOM}=\frac{IM}{OI}=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{IOM}=30^\circ \Rightarrow \alpha=60^\circ$$

Câu 24. Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') , chiều cao $R\sqrt{3}$ và bán kính đáy R . Một hình nón có đỉnh là O' và đáy là hình tròn $(O;R)$. Tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng

- A. 3. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có diện tích xung quanh của hình trụ là $S_1 = 2\pi Rh = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\pi R^2\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_2 = \pi Rl = \pi R.\sqrt{(R\sqrt{3})^2 + R^2} = 2\pi R^2$.

Tỷ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón bằng $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi R^2\sqrt{3}}{2\pi R^2} = \sqrt{3}$.

Câu 25. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng?

A. $V = 6$.

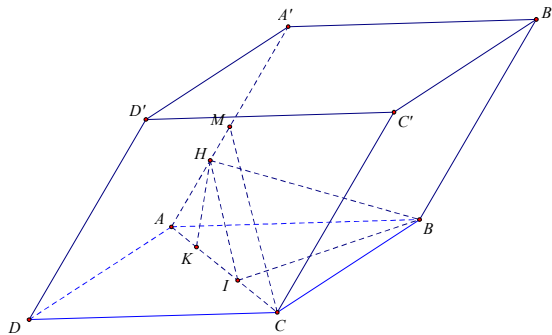
B. $V = 8$.

C. $V = 12$.

D. $V = 10$.

Lời giải

Chọn B



Từ B kẻ $BI \perp AC \Rightarrow BI \perp (AA'C'C)$.

Từ I kẻ $IH \perp AA' \Rightarrow \widehat{((AA'C'C), (AA'B'B))} = \widehat{BHI}$.

Theo giả thiết ta có $AC = 3 \Rightarrow BI = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông BIH có $\tan \widehat{BHI} = \frac{BI}{IH} \Leftrightarrow IH = \frac{BI}{\tan \widehat{BHI}} \Leftrightarrow IH = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Xét tam giác vuông ABC có $AI \cdot AC = AB^2 \Rightarrow AI = \frac{AB^2}{AC} = 2$.

Gọi M là trung điểm của AA' , do tam giác $AA'C$ cân tại C nên $CM \perp AA' \Rightarrow CM \parallel IH$.

Do $\frac{AI}{AC} = \frac{AH}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AH}{AA'} = \frac{1}{3}$.

Trong tam giác vuông AHI kẻ đường cao HK ta có $HK = \frac{4\sqrt{2}}{9} \Rightarrow$ chiều cao của lăng trụ

$ABCD.A'B'C'D'$ là $h = 3HK = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

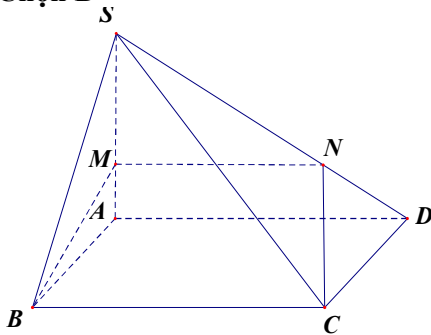
Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AD \cdot h = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} = 8$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm lấy trên cạnh SA (M không trùng với S và A). $Mp(\alpha)$ qua ba điểm M, B, C cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là:

- A. Tam giác. B. Hình thang. C. Hình bình hành. D. Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\left. \begin{array}{l} AD // BC \subset (MBC) \\ AD \not\subset (MBC) \end{array} \right\} \Rightarrow AD // (MBC)$.

Ta có $(MBC) // AD$ nên (MBC) và (SAD) có giao tuyến song song AD .

Trong (SAD) , vẽ $MN // AD (N \in SD) \Rightarrow MN = (MBC) \cap (SAD)$.

Thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi (MBC) là tứ giác $BCNM$. Do $MN // BC$ (cùng song song AD) nên $BCNM$ là hình thang.

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét đường thẳng d xác định bởi $\begin{cases} x=1 \\ y+z=2 \end{cases}$ và đường

thẳng d' xác định bởi $\begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$. Tính bán kính nhỏ nhất R của mặt cầu tiếp xúc cả hai đường thẳng d và d' .

- A. $R = \frac{1}{2}$. B. $R = 2$. C. $R = \sqrt{2}$. D. $R = 1$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ đi qua điểm $M(1;0;2)$ có vectơ

chỉ phương $\vec{u}_d = (0;1;-1)$.

Đường thẳng d' có phương trình tham số là $\begin{cases} x=0 \\ y=t' \\ z=t' \end{cases}, (t' \in \mathbb{R})$ đi qua điểm $O(0;0;0)$ có vectơ chỉ

phương $\vec{u}_{d'} = (0;1;1)$.

$[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] = (2;0;0) \Rightarrow [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] \cdot \overline{OM} = 2$. Suy ra $d(d, d') = \frac{|\overline{OM} \cdot [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]|}{|[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]|} = \frac{2}{2} = 1$.

Vì d và d' chéo nhau nên bán kính nhỏ nhất R của mặt cầu tiếp xúc cả hai đường thẳng d và

$$d' \text{ bằng } R = \frac{d(d, d')}{2} = \frac{1}{2}.$$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu của đường thẳng $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$ trên mặt phẳng (Oxy) ?

A. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+3t \\ z = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-3t \\ z = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+3t \\ z = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = 0 \end{cases}$

Lời giải

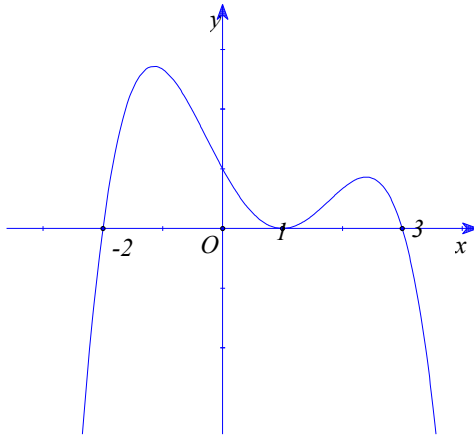
Chọn C

Đường thẳng $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$ qua $M(1; -2; 3)$ và $N(3; 1; 4)$.

Gọi M' và N' lần lượt là hình chiếu của M và N trên (Oxy) ta có $M'(1; -2; 0)$, $N'(3; 1; 0)$.

Phương trình hình chiếu cần tìm là: $M'N' : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+3t \\ z = 0 \end{cases}$

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực đại.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = (x^2 - 2x)' f'(x^2 - 2x) = (2x - 2) f'(x^2 - 2x)$

$$\text{Giải phương trình } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Từ đồ thị } f'(x) \text{ ta có } f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 3 \end{cases} \text{ nên } f'(x^2 - 2x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x < -2 \\ x^2 - 2x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	3	$+\infty$
$2x-2$	-		-		-	0	+
$f'(x^2-2x)$	-	0	+	0	+		+
$g'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$g(x)$	↖		↘		↗		↙

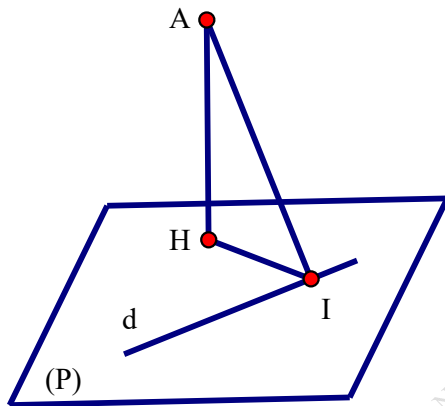
Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có hai điểm cực đại.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P) bằng

- A. $\frac{7\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{11\sqrt{2}}{6}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{11}}{18}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $I(1+2t;t;2+2t)$ là hình chiếu vuông góc của A trên d .

d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (2;1;2)$

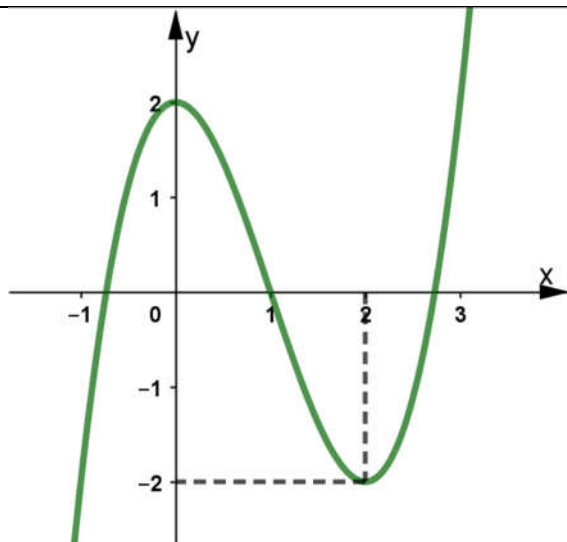
Ta có $\vec{AI} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow (2t-1)2 + (t-5) + (2t-1)2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ suy ra $I(3;1;4)$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) là $AH = d(A, (P)) \leq AI$ suy ra khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất bằng AI . Khi đó mặt phẳng (P) qua I và nhận $\vec{AI} = (1; -4; 1)$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) : $x - 4y + z - 3 = 0$

Khoảng cách từ $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P) là $d(M, (P)) = \frac{|1-8-1-3|}{\sqrt{1+16+1}} = \frac{11\sqrt{2}}{6}$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = |f(x) + 2m - 1|$ có 5 điểm cực trị.

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải****Chọn A**

Ta có hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nên hàm số $y = f(x) + 2m - 1$ có 2 điểm cực trị.

Hàm số $y = |f(x) + 2m - 1|$ có 5 điểm cực trị $\Rightarrow f(x) + 2m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Để phương trình $f(x) + 2m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = -2m + 1$ cắt đồ thị

$$\text{hàm số } y = f(x) \text{ tại 3 điểm phân biệt} \Rightarrow \begin{cases} -2m + 1 < 2 \\ -2m + 1 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{-1}{2} \\ m < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = |f(x) + 2m - 1|$ có 5 điểm cực trị thì $m \in \left(\frac{-1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0, 1\}$.

Câu 32. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình: $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x-1} + a = 0$ có đúng 4 nghiệm.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải**Chọn D**

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x-1} + a = 0$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x^2}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - tx + t = 0 \quad (2)$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } t^2 - 2t + a = 0 \quad (3)$$

Phương trình (1) có đúng 4 nghiệm khi pt (3) có 2 nghiệm phân biệt t thỏa pt (2) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\text{Mà (2) có 2 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 4 \\ t < 0 \end{cases}$$

Xét bài toán bù trừ sai. Ta nên xét trực tiếp 3 Th

$$\text{TH1: } t_1 < t_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \\ a > 0 \Rightarrow a \in \emptyset \\ 1 < 0 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } 4 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \\ a > -8 \Rightarrow a \in \emptyset \\ 1 > 4 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } t_1 < 0 < 4 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a < -8 \end{cases} \Rightarrow a < -8$$

Vậy có vô số giá trị nguyên a thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ dương và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Biết $y = f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{e^x \sqrt{f^2(x)+1}}{f(x)}$ và $f(\ln 2) = \sqrt{3}$ họ nguyên hàm của hàm số $e^{2x} \cdot f(x)$ là

A. $\frac{2}{5} \sqrt{(e^x + 1)^5} + \frac{2}{3} \sqrt{(e^x + 1)^3} + C$. B. $\frac{1}{3} \sqrt{(e^{2x} - 1)^3} - \sqrt{e^{2x} - 1} + C$.
 C. $\frac{1}{3} \sqrt{(e^{2x} - 1)^3} + C$. D. $\frac{1}{3} \sqrt{(e^x - 1)^3} + C$.

Lời giải

$$f'(x) = \frac{e^x \sqrt{f^2(x)+1}}{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = e^x \Leftrightarrow \int \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} dx = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{f^2(x)+1} = e^x + C$$

$$\text{Ta có } f(\ln 2) = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = e^{\ln 2} + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow f^2(x) = e^{2x} - 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{e^{2x} - 1} \quad \forall x \in (0; +\infty)$$

$$I = \int e^{2x} \cdot f(x) dx = \int e^{2x} \cdot \sqrt{e^{2x} - 1} dx$$

$$\text{Đặt } t = e^{2x} \Rightarrow dt = 2e^{2x} dx$$

$$I = \int \sqrt{t-1} \frac{dt}{2} = \frac{1}{3} \sqrt{(t-1)^3} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(e^{2x} - 1)^3} + C$$

Câu 34. Một tiểu đội có 10 người được xếp ngẫu nhiên thành hàng dọc, trong đó có anh A và anh B . Tính xác suất để A và B đứng cạnh nhau.

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{1}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Số cách xếp 10 người được xếp ngẫu nhiên thành hàng dọc là $10!$.

Số cách xếp A và B đứng cạnh nhau là $9! \cdot 2$.

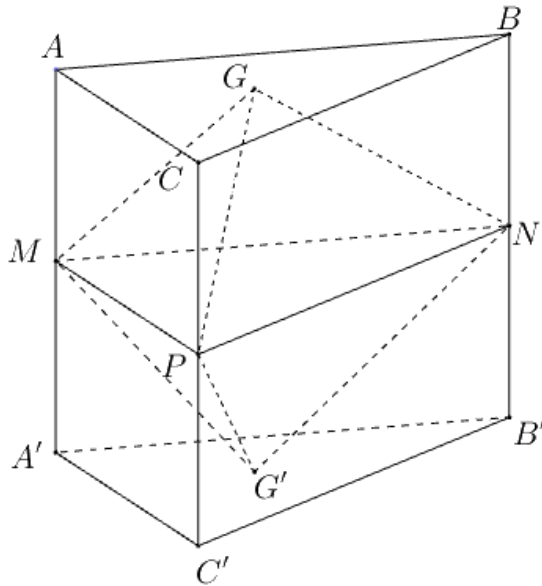
$$\text{Xác suất để } A \text{ và } B \text{ đứng cạnh nhau là } \frac{9! \cdot 2}{10!} = \frac{1}{5}$$

Câu 35. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ diện tích đáy bằng 3 và chiều cao bằng 5. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC' . G, G' lần lượt là trọng tâm của hai đáy $ABC, A'B'C'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm G, G', M, N, P bằng

A. 10. B. 3. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $V_{ABC.A'B'C'} = 3.5 = 15$ (đvtt).

Ta có $V_{GG'MNP} = V_{G.MNP} + V_{G'.MNP}$.

Do M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC' nên mp (MNP) chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối lăng trụ bằng nhau $ABC.MNP$ và $MNP.A'B'C'$.

Lại có $G \in (ABC)$ nên $V_{G.MNP} = \frac{1}{3}V_{ABC.MNP}$, tương tự ta có $V_{G'.MNP} = \frac{1}{3}V_{A'B'C'.MNP}$

Do đó

$$\begin{aligned} V_{GG'MNP} &= V_{G.MNP} + V_{G'.MNP} = \frac{1}{3}V_{ABC.MNP} + \frac{1}{3}V_{MNP.A'B'C'} \\ &= \frac{1}{3}(V_{ABC.MNP} + V_{MNP.A'B'C'}) = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}.15 = 5. \end{aligned}$$

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ có phương trình:

Đáp án:

Lời giải

$$y' = x^2 - 4x + 3$$

$$y'' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Gọi } M(x_0; y_0) \text{ là tiếp điểm} \Rightarrow M\left(2; \frac{5}{3}\right)$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y = y'(2)(x - 2) + \frac{5}{3} \Leftrightarrow y = -x + \frac{11}{3}.$$

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau. Hàm số đã cho có bao nhiêu cực tiểu?

x	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0 +	-	0 +	

Đáp án:

Lời giải

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;-2)$, $B(1;-3;1)$, $C(3;-5;2)$. Độ dài đường cao AH của tam giác ABC là.

Đáp án:

Lời giải

Ta có $\overline{BC} = (2; -2; 1)$ và $\overline{AB} = (-1; -4; 3)$, $[\overline{BC}; \overline{AB}] = (2; 7; 10)$.

Do đó độ dài của đường cao AH là khoảng cách từ A đến BC .

$$\text{Ta có } AH = \frac{|\overline{AB}; \overline{BC}|}{|\overline{BC}|} = \sqrt{17}.$$

Câu 39. Số tập con của tập $M = \{1; 2; 3\}$ là

Đáp án:

Lời giải

Số tập con không chứa phần tử nào của tập M là C_3^0

Số tập con chứa 1 phần tử của tập M là C_3^1

Số tập con chứa 2 phần tử của tập M là C_3^2

Số tập con chứa 3 phần tử của tập M là C_3^3

Vậy số tập con của tập M là $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$

Câu 40. Cho $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 4} = 5$. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{6f(x) + 6} + 4)}$

Đáp án:

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 4} = 5$ nên $f(4) = 5$.

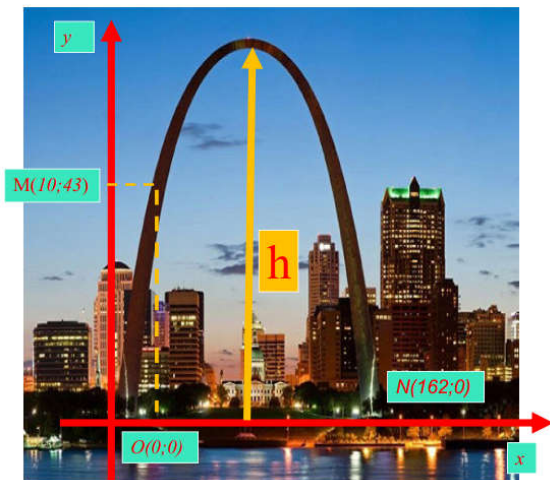
$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{6f(x) + 6} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - 5}{x - 4} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{6f(x) + 6} + 4} = 5 \cdot \frac{\sqrt{4} + 2}{\sqrt{6 \cdot 5 + 6} + 4} = 2.$$

Câu 41. Khi du lịch đến thành phố Xanh Lu-I (Mĩ), ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Ac-xơ. Khoảng cách giữa hai chân cổng là $162m$. Từ một điểm trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là $43m$ và khoảng cách tới điểm chân cổng gần nhất là $10m$. Chiều cao của cổng gần với số nào sau đây?



Đáp án:

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho một chân cổng đi qua gốc O như hình vẽ trên, chân kia là điểm $N(162;0)$. Giả sử Parabol có phương trình $(P): y = ax^2 + bx + c$.

Khi đó Parabol (P) đi qua các điểm $O(0;0)$, $M(10;43)$, $N(162;0)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 0 \\ 26244a + 162b + c = 0 \\ 100a + 10b + c = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{43}{1520} \\ b = \frac{3483}{760} \\ c = 0 \end{cases}$$

Do đó $(P): y = -\frac{43}{1520}x^2 + \frac{3483}{760}x$.

Khi đó chiều cao của cổng bằng tung độ đỉnh của (P) là $h = y(81) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{282123}{1520} \approx 185,6(m)$.

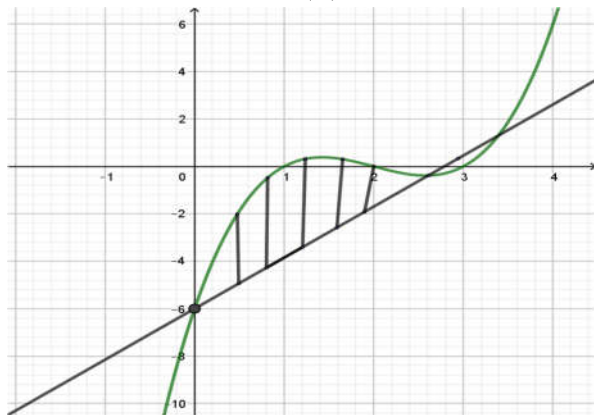
Câu 42. Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

Đáp án:

Lời giải

Để hàm số có ba điểm cực trị thì $(m+1)m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 0 \end{cases}$. Vậy $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Câu 43. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng $d: y = kx - 6$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên k để $S_1 > S_2$ (trong đó S_1, S_2 là phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ và đường thẳng $y = kx - 6$, S_1 là phần gạch chéo).



Đáp án:

Lời giải

Vì đồ thị (C) của hàm số bậc 3 cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ 1; 2; 3 nên có ta có $y = m(x-1)(x-2)(x-3)$.

Vì (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ là -6 nên suy ra $m = 1$.

Vậy $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Điều kiện để tồn tại miền S_1, S_2 thì phương trình tương giao $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = kx - 6$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 11 - k = 0$ Có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} k > 2 \\ k \neq 11 \end{cases}$.

Gọi a, b là hai trong ba hoành độ giao điểm của (C) và d ($2 < a < 3 < b$).

Từ hình vẽ có $\int_0^a (x^3 - 6x^2 + 11x - 6 - kx + 6) dx > \int_a^b (-x^3 + 6x^2 - 11x + 6 + kx - 6) dx$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - \frac{k}{2}x^2 \right) \Big|_0^a > \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - \frac{k}{2}x^2 \right) \Big|_b^a$

$\Leftrightarrow b^4 - 8b^3 + 22b^2 - 2kb^2 > 0$

$\Leftrightarrow b^2 - 8b + 22 - 2k > 0$

$\Leftrightarrow 2k < b^2 - 8b + 22$.

Xét hàm số $g(b) = b^2 - 8b + 22$. Ta có bảng biến thiên trên khoảng $(3; +\infty)$

b	3	4	$+\infty$
$g(b)$		6	

(Note: The diagram shows a downward arrow from 3 to 4 and an upward arrow from 4 to $+\infty$, with the value 6 at $b=4$.)

Từ bảng biến thiên ta có $2k < b^2 - 8b + 22 \forall b > 3 \Leftrightarrow 2k < 6 \Leftrightarrow k < 3$. Mà $k > 2$ nên không có số nguyên k nào thỏa mãn yêu cầu của bài.

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	-		+	-
y	5	-2	2	-1

(Note: The diagram shows a downward arrow from 5 to -2 and an upward arrow from -2 to 2, and a downward arrow from 2 to -1.)

Tính tổng các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình

$f(|x-1|+2) = f(\sqrt{3-m}+2)$ có nghiệm

Đáp án:

Lời giải

Đặt $t = |x-1|+2 \geq 2$ thì phương trình $f(|x-1|+2) = f(\sqrt{3-m}+2)$ (1) trở thành

$f(t) = f(\sqrt{3-m}+2)$ (2) với $t \geq 2$.

Để phương trình (2) có nghiệm thì đường thẳng $y = f(\sqrt{3-m}+2)$ phải cắt đồ thị hàm số

$$y = f(t) \text{ tại ít nhất một điểm với } t \geq 2 \Leftrightarrow -1 < f(\sqrt{3-m+2}) \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $1+2+3=6$.

Câu 45. Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(5-12i)z+1-2i$ trong mặt phẳng Oxy là

Đáp án:

Lời giải

Gọi $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$x + yi = (5 - 12i)z + 1 - 2i$$

$$x - 1 + (y + 2)i = (5 - 12i)z$$

$$\Rightarrow z = \frac{(x-1) + (y+2)i}{5-12i} = \frac{[(x-1) + (y+2)i](5+12i)}{13}$$

$$z = \frac{5(x-1) - 12(y+2)}{13} + \frac{(y+2)5 + (x-1)12}{13}i$$

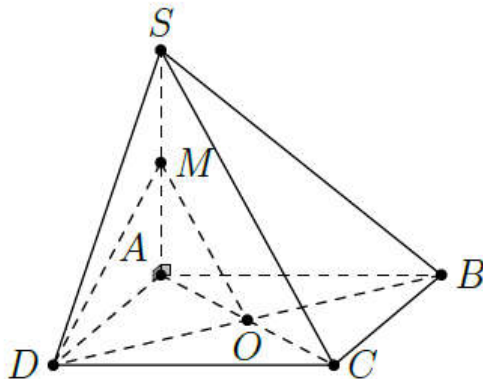
$$z = \frac{5x - 12y - 29}{13} + \frac{12x + 5y - 2}{13}i$$

$$\text{Mà } |z|=1 \text{ nên } \left(\frac{5x-12y-29}{13}\right)^2 + \left(\frac{12x+5y-2}{13}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 169$$

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa hai đường thẳng SC và BD nằm trong khoảng nào?

Đáp án:

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD và M là trung điểm của SA .

$$\text{Trong hình chữ nhật } ABCD \text{ ta có } OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + AB^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a.$$

$$\text{Xét tam giác } MAB \text{ vuông tại } A, \text{ ta có: } MB = \sqrt{AB^2 + MA^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } MAO \text{ vuông tại } O, \text{ ta có: } MO = \sqrt{AO^2 + MA^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Do $MO \parallel SC$ nên góc giữa hai đường thẳng SC và BD là góc giữa hai đường thẳng MO và BD .

Áp dụng định lý cosin vào tam giác MOB ta có

$$\cos \widehat{MOB} = \frac{OB^2 + OM^2 - BM^2}{2 \cdot OB \cdot OM} = \frac{a^2 + 2a^2 - 2a^2}{2 \cdot a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{MOB} \approx 69^\circ.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và BD bằng góc $\widehat{MOB} \approx 69^\circ$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(Q): x + y - 2z + 9 = 0$.

Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 2; 3)$, vuông góc với (d) và song song với (Q) . Tính khoảng cách từ giao điểm của (d) và (Q) đến (Δ) ta được

Đáp án:

Lời giải

Ta có: VTCP của (d) là $\vec{u}_{(d)} = (1; -4; 2)$ và VTPT của (Q) là $\vec{n}_{(Q)} = (1; 1; -2)$.

Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(-1; 2; 3)$ và có VTCP là $\vec{u} = [\vec{u}_{(d)}, \vec{n}_{(Q)}] = (6; 4; 5)$.

Gọi $B = (d) \cap (Q)$

$$B \in (d) \Rightarrow B(-4 + t; 1 - 4t; 3 + 2t)$$

$$B \in (Q) \Rightarrow t = 0 \Rightarrow B(-4; 1; 3) \Rightarrow \vec{AB} = (-3; -1; 0) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{u}] = (-5; 15; -6)$$

$$\text{Vậy: } d(B; (\Delta)) = \frac{|\vec{AB}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{286}}{\sqrt{77}} = \frac{\sqrt{182}}{7}$$

Câu 48. Cho các số thực m, n thỏa mãn $m > n > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{\min} của biểu thức

$$P = \log_{\frac{m}{n}}^2(m^2) + 3 \log_n\left(\frac{m}{n}\right)$$

Đáp án:

Lời giải

Do $m > n > 1$ nên ta có.

$$\begin{aligned} P &= \log_{\frac{m}{n}}^2(m^2) + 3 \log_n\left(\frac{m}{n}\right) = \left(2 \log_{\frac{m}{n}} m\right)^2 + 3(\log_n m - 1) \\ &= \frac{4}{\left(\log_m \frac{m}{n}\right)^2} + 3(\log_n m - 1) = \frac{4}{(1 - \log_m n)^2} + \frac{3}{\log_m n} - 3 \end{aligned}$$

Do $m > n > 1$ nên $\begin{cases} \log_m n < \log_m m = 1 \\ \log_m n > \log_m 1 = 0 \end{cases}$

Xét hàm số $y = \frac{4}{(1-x)^2} + \frac{3}{x} - 3$ trên $(0; 1)$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{8}{(1-x)^3} - \frac{3}{x^2}$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{(1-x)^3} - \frac{3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^3 - x^2 + 9x - 3}{x^2(1-x)^3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên.

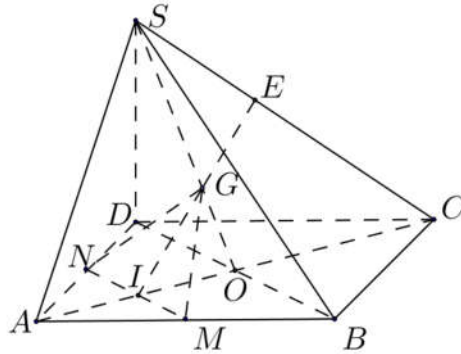
x	0	$\frac{1}{3}$	1
y'	-	0	+
y			

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $P_{\min} = 15$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $CD = a$, $SD \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB, AD và G là trọng tâm tam giác SAC . Mặt phẳng (GMN) cắt cạnh SC tại E . Khoảng cách từ E đến mặt phẳng (SAD) bằng

Đáp án:

Lời giải



Ta có $SD \perp (ABCD) \Rightarrow SD \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow d_{(C, (SAD))} = CD = a$

Trong mp $(ABCD)$, gọi $O = BD \cap AC$, $I = MN \cap AC$, $SC \cap GI = E$ suy ra E là giao điểm của (GMN) với SC

Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác SOC , ta được:

$$\frac{ES}{EC} \cdot \frac{IC}{IO} \cdot \frac{GO}{GS} = 1 \Leftrightarrow \frac{ES}{EC} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{ES}{EC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{ES}{CS} = \frac{2}{5}$$

Ta có $CE \cap (SAD) = S, CS = \frac{5}{2} ES \Rightarrow d_{(E, (SAD))} = \frac{2}{5} d_{(C, (SAD))} = \frac{2}{5} a$.

Câu 50. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông. Biết tổng diện tích tất cả các mặt của khối hộp bằng 50. Tính thể tích lớn nhất V_{\max} của khối hộp đã cho.

Đáp án:

Lời giải

Đặt a là độ dài cạnh của hình vuông đáy, b là chiều cao của khối hộp với $a, b > 0$.

Theo giả thiết ta có $2a^2 + 4ab = 50 \Leftrightarrow 2a(a + 2b) = 50 \Leftrightarrow a(a + 2b) = 25 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \left(\frac{25}{a} - a \right)$.

Do $b > 0 \Rightarrow \frac{25}{a} - a > 0 \rightarrow a < 5$.

Khi đó thể tích của khối hộp $V = a^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{25}{a} - a \right) = -\frac{1}{2} a^3 + \frac{25}{2} a$.

Xét hàm $f(a) = -\frac{1}{2} a^3 + \frac{25}{2} a$ trên $(0; 5)$, ta được $\max_{(0;5)} f(a) = f\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) = \frac{125\sqrt{3}}{9}$.

B. ĐIỀN KHUYẾT (15 CÂU)

• XEM THÊM ĐỀ CƯƠNG ÔN THI TẠI:

- <https://www.nbv.edu.vn/2022/01/de-cuong-danh-gia-nang-luc-dhqg-ha-noi.html>

Theo dõi Fanpage: Nguyễn Bảo Vương <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Facebook Nguyễn Vương <https://www.facebook.com/phong.baovuongTrang27>

Hoặc Facebook: Nguyễn Vương [👉 https://www.facebook.com/phong.baovuong](https://www.facebook.com/phong.baovuong)

Tham gia ngay: [Nhóm Nguyễn Bào Vương \(TÀI LIỆU TOÁN\)](https://www.facebook.com/groups/703546230477890/) [👉 https://www.facebook.com/groups/703546230477890/](https://www.facebook.com/groups/703546230477890/)

Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương
[👉 https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber](https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber)

👉 Tải nhiều tài liệu hơn tại: <https://www.nbv.edu.vn/>

Nguyễn Bảo Vương