ĐỀ SỐ 7. ÔN THI ĐGNL ĐHQG HÀ NỘI 2021-2022

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

A. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (35 CÂU)

Câu 1. Thống kê điểm môn toán trong một kì thi của 400 em học sinh thấy có 72 bài được điểm 5. Hỏi giá trị tần suất của giá trị $x_i = 5$ là

A. 72% **B.** 36% **C.** 18% **D.** 10%

Câu 2. Một ô tô đang chạy với vận tốc $15\left(m/s\right)$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc $a = 3t - 8\left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng vận tốc. Hỏi sau 10 giây tăng vận tốc ô tô đi được bao nhiêu mét?

A. 246. **B.** 250. **C.** 150. **D.** 180.

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(x-1\right) \le 1$ là

A. $\left(-\infty;4\right]$. **B.** $\left(1;4\right]$. **C.** $\left(1;4\right]$. **D.** $\left(-\infty;4\right)$.

Câu 4. Hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = y + 5x \\ \dfrac{1}{y} = x + 5y \end{cases}$. Có bao nhiêu cặp nghiệm $\left(x, y\right)$ mà $x \ne y$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 5. Giả sử A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2. Khi đó độ dài của $\overrightarrow{AB}$ bằng

A. $\left|z_1\right| + \left|z_2\right|$. **B.** $\left|z_2 + z_1\right|$. **C.** $\left|z_2 - z_1\right|$. **D.** $\left|z_1\right| - \left|z_2\right|$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(2;1;0\right)$, $B\left(0;-1;4\right)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $-x - y + 2z + 3 = 0$. **B.** $2x + y - 2 = 0$.

C. $2x + y + z - 4$. **D.** $x + y - 2z + 3 = 0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(\alpha\right): 3x - 2y + z + 6 = 0$. Hình chiếu vuông góc của điểm $A\left(2;-1;0\right)$ lên mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ có tọa độ là

A. $\left(2;-2;3\right)$. **B.** $\left(1;1;-1\right)$. **C.** $\left(-1;1;-1\right)$. **D.** $\left(1;0;3\right)$.

Câu 8. Bất phương trình $\dfrac{x^2\left(x^2 - 1\right)}{x^2 + 5x + 6} \le 0$ có tập nghiệm là:

A. $\left(-2;-1\right] \cup \left[0;1\right]$. **B.** $\left(-3;-2\right) \cup \left[-1;1\right]$.

C. $\left(-3;-2\right) \cup \left(-1;1\right)$. **D.** $\left(-3;-2\right) \cup \left(0;1\right)$.

Câu 9. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-3;3\right]$ để phương trình $\left(m^2 + 2\right)\cos^2 x - 2m\sin 2x + 1 = 0$ có nghiệm.

A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

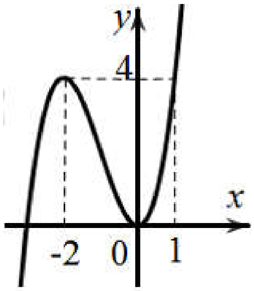
Câu 10. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là 12288 m^2). Tính diện tích mặt trên cùng.

A. $6m^2$. **B.** $12m^2$. **C.** $10m^2$. **D.** $8m^2$.

Câu 11. Họ các nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2}$ là:

A. $e^x+\dfrac{1}{x}+C$. **B.** $\ln x+\dfrac{1}{x}+C$. **C.** $\ln|x|+\dfrac{1}{x}+C$. **D.** $\ln|x|-\dfrac{1}{x}+C$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(x^2+2x-2\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $[0;1]$.



A. $[0;4]$. **B.** $[-1;0]$. **C.** $[0;1]$. **D.** $\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$

Câu 13. Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu $10\,\text{m/s}$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần có gia tốc là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 12 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc

A. 2712m. **B.** 2160m. **C.** 2736m. **D.** 2592m.

Câu 14. Một người có 58000000 đồng gửi tiết kiệm ngân hàng với kì hạn 1 tháng (theo hình thức lãi kép), sau đúng 8 tháng thì lĩnh về được 61328000 đồng cả gốc và lãi. Tìm lãi suất hàng tháng.

A. 0, 6%/ tháng. **B.** 0, 8%/ tháng. **C.** 0, 5%/ tháng. **D.** 0, 7%/ tháng.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+167)=7$ là

A. $x=2021$. **B.** $x=2020$. **C.** $x=1010$. **D.** $x=2019$.

Câu 16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x+1}$ và các đường thẳng $y=0$, $x=0$, $x=2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox.

A. $V=\pi\ln 3$. **B.** $V=\dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{2}{3}$. **D.** $V=\ln 3$.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để hàm số $y=\dfrac{\cot^2 x-2m\cot x+2m^2-1}{\cot x-m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. 0. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2018.

Câu 18. Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{3}{2}<|z|<2$. **B.** $|z|>2$. **C.** $|z|<\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$.

Câu 19. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z+2-3i}{\overline{z}-4+i}\right|=1$ là.

A. Đường tròn tâm $I(-2;3)$ bán kính 1. **B.** Đường tròn tâm $I(-4\,;1)$ bán kính 1.

C. Đường thẳng $3x+y1=0$. **D.** Đường thẳng $3xy1=0$.

Câu 20. Cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(4;6)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục Oy sao cho diện tích tam giác MAB bằng 1 ?

A. $(0;2)$. **B.** $(0;0)$ và $\left(0;\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $(1;0)$. **D.** $(4;0)$.

Câu 21. Trong mặt phẳng toạ độ cho ba điểm $A(-2;0),B(8;0),C(0;4)$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

A. 6. **B.** 5. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{26}$.

Câu 22. Cho $A(1;0;1)$; $B(2;1;2)$ và $(P):x+2y+3z+3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua 2 điểm A,B và vuông góc (P).

A. $(Q):x-2y+z-2=0$. **B.** $(Q):x-2y+z+2=0$.

C. $(Q):x+2y+z+2=0$. **D.** $(Q):x-2y-z-2=0$.

Câu 23. Hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=6$, $AD=4$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm bốn cạnh AB, BC, CD, DA. Cho hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh QN, khi đó tứ giác $MNPQ$ tạo thành vật tròn xoay có thể tích bằng:

A. $V=2\pi$. **B.** $V=4\pi$. **C.** $V=8\pi$. **D.** $V=6\pi$.

Câu 24. Xét hình trụ (T) có bán kính R, chiều cao h thoả mãn $R=2h\sqrt{3}$. (N) là hình nón có bán kính đáy R và chiều cao gấp đôi chiều cao của (T). Gọi (S_1) và (S_2) lần lượt là diện tích xung quanh của (T) và (N), khi đó $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 25. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $AA'=a\sqrt{2}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng?

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M ở trên cạnh BC. Mặt phẳng (α) qua M song song song với AB và CD. Thiết diện của (α) với tứ diện là hình gì?

A. Hình chữ nhật. **B.** Tứ giác lồi. **C.** Hình thang. **D.** Hình bình hành.

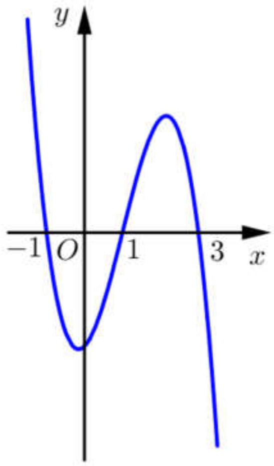
Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

A. $6\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-3z+4=0$. Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ.

A. $\vec{u}=(1;2;1)$. **B.** $\vec{u}=(-1;2;1)$. **C.** $\vec{u}=(-1;-2;1)$. **D.** $\vec{u}=(-1;2;-1)$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



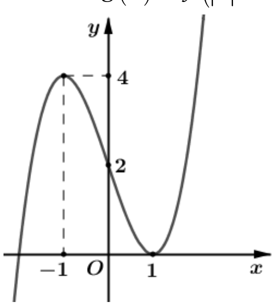
Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2-2x+2020}\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-3y+2z-15=0$ và ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;-1;3)$, $C(1;-1;-1)$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc (P) sao cho $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị $2x_0+3y_0+z_0$ bằng

A. 10. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 15.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị.



A. $m<-1$. **B.** $m>-1$. **C.** $m>1$. **D.** $m<1$.

Câu 32. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2+2(m+3)x-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m\in(-3;5)$. **B.** $m\in(5;+\infty)$.

C. $m\neq 3$. **D.** $m\in(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;0]$ thỏa mãn $f(x)+2f(-x-1)=6x^2+9x+9$. Tính $\int_{-2}^{0} xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng:

A. $\frac{13}{3}$. **B.** $-\frac{74}{3}$. **C.** $-\frac{26}{3}$. **D.** $\frac{22}{3}$.

Câu 34. Một lớp học có 30 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn một ban cán sự lớp gồm có 3 học sinh. Tính xác suất để ban cán sự lớp có cả nam và nữ.

A. $\frac{435}{988}$. **B.** $\frac{135}{988}$. **C.** $\frac{285}{494}$. **D.** $\frac{5750}{9880}$.

Câu 35. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và diện tích đáy bằng 3. Gọi M, N, P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $BCC'B'$ và $CAA'C'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. 6. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** 3.

B. ĐIỀN KHUYẾT (15 CÂU)

Câu 36. Cho hàm số $y=\frac{2x-4}{x-3}$ có đồ thị là (H). Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (H) với trục hoành là:

Đáp án: ....

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)^5(x-3)^7$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Đáp án: ....

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+y-2z-5=0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{3}$. Gọi A là giao điểm của Δ và (P); và M là điểm thuộc đường thẳng Δ sao cho $AM=\sqrt{84}$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P).

Đáp án: ....

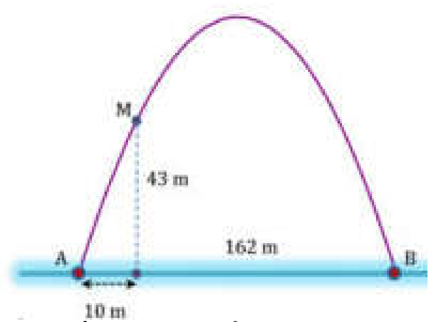
Câu 39. Tổ của An và Cường có 7 học sinh. Số cách xếp 7 học sinh ấy theo hàng dọc mà An đứngđầu hàng, Cường đứng cuối hàng là:

Đáp án: ....

Câu 40. Cho $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{1-x^2}=14$. Giới hạn của $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3f(x)-2}-2}{x-1}$ là:

Đáp án: ....

Câu 41. Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng $162m$. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao $43m$ so với mặt đất, người ta thả một sợi dây chạm đất. Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn $10m$. Giả sử các số liệu trên là chính xác



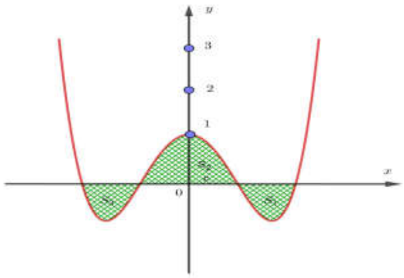
Gọi h là chiều cao của cổng. Hãy tính chiều cao của cổng.

Đáp án: ....

Câu 42. Tìm tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+2018$ không có cực trị.

Đáp án: ....

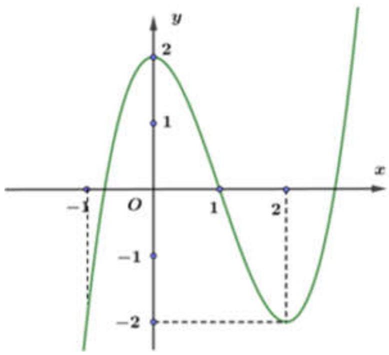
Câu 43. Cho hàm số $y=x^4-3x^2+m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Biết tồn tại duy nhất giá trị $m = \dfrac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản sao cho $S_1 + S_3 = S_2$. Đặt $T = a + b$. Mệnh đề nào đúng ?

Đáp án: ....

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x) = f\left(f\left(f(x)\right)\right)$.



Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ trên nửa khoảng $(-\infty; 2]$ là

Đáp án: ....

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \le 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

Đáp án: ....

Câu 46. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên $AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB', $B'C'$. Lấy điểm P thuộc $A'B'$ sao cho $PB' = \dfrac{a}{4}$. Tính $\tan$ góc giữa đường thẳng AP và mặt phẳng (MNP)

Đáp án: ....

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3), B(0;1;1), C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z + 3 = 0$?

Đáp án: ....

Câu 48. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log(x + 2y) = \log x + \log y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}} . e^{\frac{y^2}{1+x}}}$.

Đáp án: ....

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{ABC}=60^0$. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Kí hiệu $d(BC,SD)$ là khoảng cách giữa 2 đường thẳng CD và SA. Khẳng định nào sau đây đúng ?

Đáp án: ………….

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$, $\widehat{ASB}=60°$, $\widehat{BSC}=90°$, $\widehat{CSA}=120°$. Gọi M,N lần lượt là các điểm trên cạnh AB và SC sao cho $\frac{CN}{SC}=\frac{AM}{AB}$. Khi khoảng cách giữa M và N nhỏ nhất, tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

Đáp án: ………….

Lời giải tham khảo

A. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (35 CÂU)

Câu 1. Thống kê điểm môn toán trong một kì thi của 400 em học sinh thấy có 72 bài được điểm 5. Hỏi giá trị tần suất của giá trị x_i =5 là

A. 72% **B.** 36% **C.** 18% **D.** 10%

Lời giải:

Chọn C

$\frac{72}{400}.100\% = 18\%$

Câu 2. Một ô tô đang chạy với vận tốc $15\,(m/s)$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc $a = 3t - 8\,(m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng vận tốc. Hỏi sau 10 giây tăng vận tốc ô tô đi được bao nhiêu mét?

A. 246. **B.** 250. **C.** 150. **D.** 180.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{dt} = \int (3t-8)\,\mathrm{dt} = \frac{3t^2}{2} - 8t + C$.

Vận tốc khi ô tô bắt đầu tăng tốc là $15\,m/s$: $v(0) = 15 \Leftrightarrow C = 15$.

Vận tốc của ô tô là $v(t) = \frac{3t^2}{2} - 8t + 15$.

Quãng đường ô tô đi được sau 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

$\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} - 8t + 15\right)\mathrm{dt} = 250\,(\mathrm{m})$.

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x-1) \le 1$ là

A. $(-\infty; 4]$. **B.** $(1;4]$. **C.** $(1;4]$. **D.** $(-\infty;4)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình tương đương $\log_3(x-1) \le 1 \Leftrightarrow 0 < x-1 \le 3 \Leftrightarrow 1 < x \le 4$.

Câu 4. Hệ phương trinh: $\begin{cases} \frac{1}{x} = y + 5x \\ \frac{1}{y} = x + 5y \end{cases}$. Có bao nhiêu cặp nghiệm (x,y) mà $x \ne y$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x \ne 0; y \ne 0$

Ta có $\begin{cases} \frac{1}{x} = y + 5x \\ \frac{1}{y} = x + 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + xy = 1 \\ 5y^2 + xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + xy = 1 \\ (x-y)(x+y) = 0 \end{cases}$

Do $x \ne y$ nên $\begin{cases} 5x^2 + xy = 1 \\ (x-y)(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = 1 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2}; y = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Câu 5. Giả sử A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2. Khi đó độ dài của $\overrightarrow{AB}$ bằng

A. $|z_1|+|z_2|$. **B.** $|z_2+z_1|$. **C.** $|z_2-z_1|$. **D.** $|z_1|-|z_2|$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

Theo đề bài ta có: $A(a;b)$, $B(c;d)\Rightarrow AB=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$.

$z_2-z_1=(a-c)+(d-b)i\Rightarrow|z_2-z_1|=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;0)$, $B(0;-1;4)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $-x-y+2z+3=0$. **B.** $2x+y-2=0$.

C. $2x+y+z-4$. **D.** $x+y-2z+3=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là trung điểm của $AB\Rightarrow M(1;0;2)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có một véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;4)$

Mặt phẳng trung trực của AB đi qua $M(1;0;2)$ và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc tơ pháp tuyến nên phương trình mặt phẳng là: $-2(x-1)-2y+4(z-2)=0\Leftrightarrow -x-y+2z-3=0$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):3x-2y+z+6=0$. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;-1;0)$ lên mặt phẳng (α) có tọa độ là

A. $(2;-2;3)$. **B.** $(1;1;-1)$. **C.** $(-1;1;-1)$. **D.** $(1;0;3)$.

Lời giải

Chọn C

$(\alpha):3x-2y+z+6=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;1)$.

Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (α). Khi đó:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}=k.\vec{n}\\ H\in(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2;y+1;z)=k(3;-2;1)\\ 3x-2y+z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=3k\\ y+1=-2k\\ z=k\\ 3x-2y+z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+3k\\ y=-1-2k\\ z=k\\ 3x-2y+z+6=0\end{cases}$$

Giải hệ trên ta có: $x=-1$; $y=1$; $x=-1$ hay $H(-1;1;-1)$.

Câu 8. Bất phương trình $\dfrac{x^2(x^2-1)}{x^2+5x+6}\le 0$ có tập nghiệm là:

A. $(-2;-1]\cup[0;1]$. **B.** $(-3;-2)\cup[-1;1]$.

C. $(-3;-2)\cup(-1;1)$. **D.** $(-3;-2)\cup(0;1)$.

Lời giải

Chọn B

Cho $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Lập bảng xét dấu ta được:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		$+\infty$
x^2		+	|	+	|	+	|	+	|	+	|	+	
x^2-1		+	|	+	|	+	0	-	|	-	0	+	
x^2+5x+6		+	0	-	0	+	|	+	|	+	|	+	
VT		+	||	-	||	+	0	-	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra tập nghiệm bất phương trình đã cho là:

$S = (-3;-2) \cup [-1;1]$.

Câu 9. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3;3]$ để phương trình $(m^2+2)\cos^2 x - 2m\sin 2x + 1 = 0$ có nghiệm.

A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow (m^2+2).\dfrac{1+\cos 2x}{2} - 2m\sin 2x + 1 = 0$.

$\Leftrightarrow 4m\sin 2x - (m^2+2)\cos 2x = m^2 + 4$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 16m^2 + (m^2+2)^2 \geq (m^2+4)^2 \Leftrightarrow 12m^2 \geq 12 \Leftrightarrow m^2 \geq 1 \Leftrightarrow |m| \geq 1$.

$\xrightarrow[m\in[-3;3]]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-3;-2;-1;1;2;3\} \longrightarrow$ có 6 giá trị nguyên.

Câu 10. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là 12288 m^2). Tính diện tích mặt trên cùng.

A. $6m^2$. **B.** $12m^2$. **C.** $10m^2$. **D.** $8m^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta nhận thấy diện tích các mặt trên của mỗi tầng lập thành 1 cấp số nhân với công bội $q = \dfrac{1}{2}$

Số hạng đầu $u_1 = 12288$. Khi đó mặt trên cùng tầng 11 ứng với u_{12}.

Do đó $u_{12} = u_1.q^{11} = 12288.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{11} = 6$.

Câu 11. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^2}$ là:

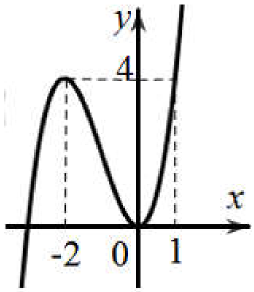
A. $e^x + \dfrac{1}{x} + C$. **B.** $\ln x + \dfrac{1}{x} + C$. **C.** $\ln|x| + \dfrac{1}{x} + C$. **D.** $\ln|x| - \dfrac{1}{x} + C$.

Lời giải

Chọn C

$\int \frac{x-1}{x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \ln|x|+\frac{1}{x}+C$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(x^2+2x-2\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $[0;1]$.



A. $[0;4]$. **B.** $[-1;0]$. **C.** $[0;1]$. **D.** $\left[-\frac{1}{3};1\right]$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^2+2x-2$. Với $x\in[0;1]\Rightarrow t\in[-2;1]$

Phương trình $f\left(x^2+2x-2\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=3m+1$ có nghiệm thuộc $[-2;1]\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le m\le 1$.

Câu 13. Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu $10\,\text{m/s}$ thì tăng tốc chuyển động nhanh dần có gia tốc là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 12 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc

A. 2712m. **B.** 2160m. **C.** 2736m. **D.** 2592m.

Lời giải

Chọn A

Ta có $v(t)=\int a(t)dt=\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+C$

Vì vận tốc ban đầu là 10 m/s nên $v(0)=10(m/s)\Leftrightarrow C=10$. Suy ra $v(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10$.

Vậy quãng đường vật đi được từ 0 giây đến 12 giây cần tìm là:

$$S=\int_0^{12}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10\right)dt=2712(m).$$

Câu 14. Một người có 58000000 đồng gửi tiết kiệm ngân hàng với kì hạn 1 tháng (theo hình thức lãi kép), sau đúng 8 tháng thì lĩnh về được 61328000 đồng cả gốc và lãi. Tìm lãi suất hàng tháng.

A. 0, 6%/ tháng. **B.** 0, 8%/ tháng. **C.** 0, 5%/ tháng. **D.** 0, 7%/ tháng.

Lời giải

Chọn D

Gọi r là lãi suất hàng tháng. Ta có:

$$T=A(1+r)^n \Leftrightarrow 61328000=58000000(1+r)^8 \Leftrightarrow (1+r)^8=\frac{61328}{58000}\Leftrightarrow r=\sqrt[8]{\frac{61328}{58000}}-1\approx 0,7\%$$

Vậy lãi suất hàng tháng là 0, 7%.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+167)=7$ là

A. $x=2021$. **B.** $x=2020$. **C.** $x=1010$. **D.** $x=2019$.

Lời giải

Chọn C

$\log_3(2x+167)=7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+167>0 \\ 2x+167=3^7 \end{cases} \Leftrightarrow 2x+167=3^7 \Leftrightarrow x=1010$.

Câu 16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x+1}$ và các đường thẳng $y=0$, $x=0$, $x=2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox.

A. $V=\pi\ln 3$. **B.** $V=\dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{2}{3}$. **D.** $V=\ln 3$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}=-\pi\left(\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_0^2=\frac{2\pi}{3}.$$

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để hàm số $y=\dfrac{\cot^2 x-2m\cot x+2m^2-1}{\cot x-m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. 0. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\cot x$. Vì $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $t\in(0;1)$.

Khi đó bài toán trở thành tìm giá trị của m để $y=\dfrac{t^2-2mt+2m^2-1}{t-m}$ đồng biến trên $(0;1)$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{t^2-2mt+1}{(t-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $y'\geq 0, \forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-2mt+1\geq 0 \\ m\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2t}\geq m \quad (1) \\ m\leq 0 \ \ hoac \ \ m\geq 1 \quad (2) \end{cases}.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2t}$ trên khoảng $(0;1)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2t^2}=\dfrac{t^2-1}{2t^2}$. Cho $f'(t)=0 \Leftrightarrow t^2-1=0 \Leftrightarrow t=\pm 1$.

Bảng biến thiên

t	0		1
$f'(t)$	‖	$-$	
$f(t)$	‖ $+\infty$	↘	1

Từ $(1)\Leftrightarrow\ m\leq 1\ (3)$.

Từ (2) và $(3)\Rightarrow m\leq 0$ hoặc $m=1$.

Mà m nguyên và $m\in[-2018;2018]$ nên có 2020 giá trị thỏa mãn.

Câu 18. Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{3}{2}<|z|<2.$ **B.** $|z|>2.$ **C.** $|z|<\frac{1}{2}.$ **D.** $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $z^{-1}=\frac{1}{|z|^2}\bar{z}.$

Vậy $(1+2i)|z|=\frac{\sqrt{10}}{z}-2+i \Leftrightarrow (|z|+2)+(2|z|-1)i=\left(\frac{\sqrt{10}}{|z|^2}\right).\bar{z}$

$\Rightarrow (|z|+2)^2+(2|z|-1)^2=\left(\frac{10}{|z|^4}\right).|z|^2=\frac{10}{|z|^2}$. Đặt $|z|^2=a>0.$

$\Rightarrow (a+2)^2+(2a-1)^2=\left(\frac{10}{a^2}\right)\Leftrightarrow a^4+a^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2=1 \\ a^2=-2 \end{array}\right. \Rightarrow a=1 \Rightarrow |z|=1.$

Câu 19. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z+2-3i}{\bar{z}-4+i}\right|=1$ là.

A. Đường tròn tâm $I(-2;3)$ bán kính 1.
B. Đường tròn tâm $I(-4\,;1)$ bán kính 1.
C. Đường thẳng $3x+y1=0$.
D. Đường thẳng $3xy1=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi \Rightarrow \bar{z}=x-yi$.

$\left|\frac{z+2-3i}{\bar{z}-4+i}\right|=1 \Rightarrow |z+2-3i| = |\bar{z}-4+i| \Rightarrow |(x+2)+(y-3)i| = |(x-4)+(1-y)i|$.

$\Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=(x-4)^2+(y-1)^2$.

$\Rightarrow 3x-y-1=0$. Tập hợp các điểm M là đường thẳng $3x-y-1=0$.

Câu 20. Cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(4;6)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục Oy sao cho diện tích tam giác MAB bằng 1 ?

A. $(0;2)$. **B.** $(0;0)$ và $\left(0;\frac{4}{3}\right)$. **C.** $(1;0)$. **D.** $(4;0)$.

Lời giải

Chọn B

$AB=5$, Gọi $M(0;m)$

Vì diện tích tam giác MAB bằng $1 \Rightarrow d(M,AB)=\frac{2}{5}$,

$AB:4x-3y+2=0 \Rightarrow \frac{|-3m+2|}{5}=\frac{2}{5}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\frac{4}{3} \end{array}\right.$

Câu 21. Trong mặt phẳng toạ độ cho ba điểm $A(-2;0), B(8;0), C(0;4)$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

A. 6. **B.** 5. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{26}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Ta có $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = (x-8)^2 + y^2 \\ (x+2)^2 + y^2 = x^2 + (y-4)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 20x = 60 \\ 4x + 8y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow I(3;0) \Rightarrow \overrightarrow{IA}(-5;0) \Rightarrow R = IA = 5$.

Câu 22. Cho $A(1;0;1)$; $B(2;1;2)$ và $(P): x+2y+3z+3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua 2 điểm A,B và vuông góc (P).

A. $(Q): x-2y+z-2=0$.
B. $(Q): x-2y+z+2=0$.
C. $(Q): x+2y+z+2=0$.
D. $(Q): x-2y-z-2=0$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB} = (1;1;1)$ và $(P): x+2y+3z+3=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;2;3)$.

Gọi $\vec{v}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).

Do mặt phẳng (Q) đi qua 2 điểm A, B và vuông góc (P) nên $\vec{v} = \left[\overrightarrow{AB}.\vec{n}\right] = (1;-2;1)$.

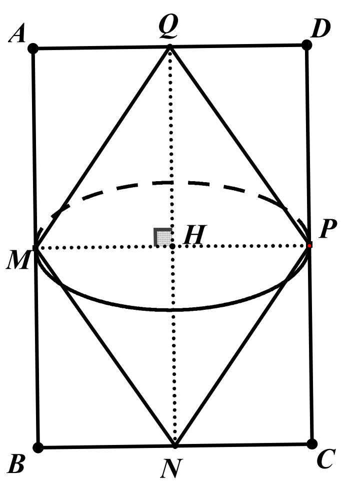
Suy ra phương trình mặt phẳng $(Q): x-2y+z-2=0$.

Câu 23. Hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 6$, $AD = 4$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm bốn cạnh AB, BC, CD, DA. Cho hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh QN, khi đó tứ giác $MNPQ$ tạo thành vật tròn xoay có thể tích bằng:

A. $V = 2\pi$.
B. $V = 4\pi$.
C. $V = 8\pi$.
D. $V = 6\pi$.

Lời giải

Chọn C



Khi đó tứ giác $MNPQ$ tạo thành vật tròn xoay gồm hai khối nón có chung đáy (hình vẽ)

Gọi V_1 là thể tích khối nón có bán kính đáy là $R_1 = MH = \frac{AD}{2} = 2, h_1 = QH = \frac{AB}{2} = 3$

$V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2.h = \frac{1}{3}\pi 4.3 = 4\pi \Rightarrow V = 2V_1 = 8\pi$.

Câu 24. Xét hình trụ (T) có bán kính R, chiều cao h thoả mãn $R = 2h\sqrt{3}$. (N) là hình nón có bán kính đáy R và chiều cao gấp đôi chiều cao của (T). Gọi (S_1) và (S_2) lần lượt là diện tích xung quanh của (T) và (N), khi đó $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích xung quanh hình trụ là $S_1 = 2\pi.R.h = \frac{2\pi R^2}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi R^2}{\sqrt{3}}$.

Diện tích xung quanh hình nón là $S_2 = \pi.R.l = \pi.R.\sqrt{h^2+R^2} = \pi.R.\sqrt{\frac{R^2}{3}+R^2} = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$.

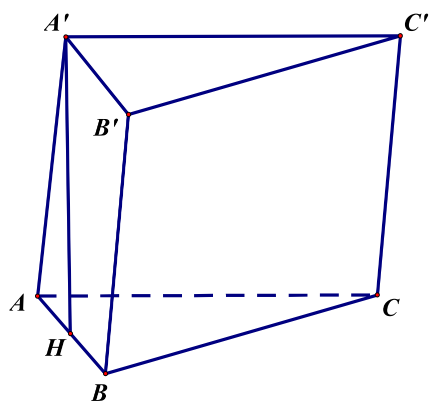
Suy ra $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$.

Câu 25. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $AA' = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng?

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



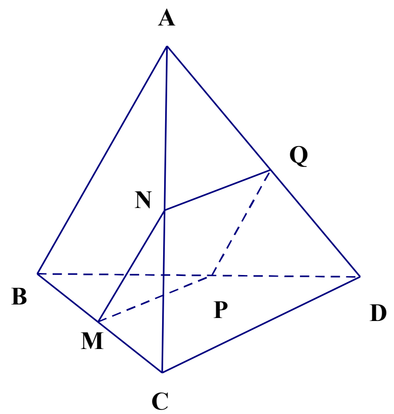
- Xét tam giác vuông cân ABC: $\sin 45^o = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{2a} \Rightarrow AB = \frac{2\sqrt{2}}{2}a = \sqrt{2}a$
- Mà tam giác ABC vuông cân nên $AB = BC = \sqrt{2}a$ và $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}\sqrt{2}a.\sqrt{2}a = a^2$.
- Xét tam giác vuông $AA'H$: $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.
- $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'H = a^2.\frac{\sqrt{6}}{2}a = \frac{\sqrt{6}}{2}a^3$.

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M ở trên cạnh BC. Mặt phẳng (α) qua M song song song với AB và CD. Thiết diện của (α) với tứ diện là hình gì?

A. Hình chữ nhật. **B.** Tứ giác lồi. **C.** Hình thang. **D.** Hình bình hành.

Lời giải

Chọn D



Trên (ABC) kẻ $MN//AB$; $N \in AC$

Trên (BCD) kẻ $MP//CD$; $P \in BD$

Ta có (α) chính là mặt phẳng (MNP)

Sử dụng đính lý ba giao tuyến ta có

$(MNP) \cap AD = \{Q\}$ với $NQ//CD//MP$

Ta có

$\left.\begin{array}{l} NQ//MP//CD \\ MN//PQ//AB \end{array}\right\} \Rightarrow$ thiết diện $MNPQ$ là hình bình hành.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

A. $6\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3MA = 2MB \Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2$

$\Leftrightarrow 9\left[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2\right] = 4\left[(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2\right]$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y + 12z = 0$

$\Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = 108$.

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6;6;-6)$ và bán kính $R = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

Do đó OM lớn nhất bằng $OI + R = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-6)^2} + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 4 = 0$. Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ.

A. $\vec{u} = (1;2;1)$. **B.** $\vec{u} = (-1;2;1)$. **C.** $\vec{u} = (-1;-2;1)$. **D.** $\vec{u} = (-1;2;-1)$.

Lời giải

Chọn B

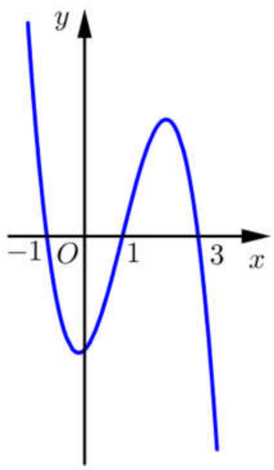
Đường thẳng Δ có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = (1;1;-1)$.

Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;2;-3)$.

$\left[\vec{u}_\Delta,\vec{n}\right]=(-1;2;1)$.

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ nên d nhận $\overrightarrow{u_d}=(-1;2;1)$ làm vectơ chỉ phương.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2-2x+2020}\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Xét hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2-2x+2020}\right)$.

$g'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2020}}.f'\left(\sqrt{x^2-2x+2020}\right)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(\sqrt{x^2-2x+2020}\right).\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2020}}=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(\sqrt{x^2-2x+2020}\right)=0\\\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2020}}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-2x+2020}=-1\\\sqrt{x^2-2x+2020}=1\\\sqrt{x^2-2x+2020}=3\\x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-2x+2020}=-1(vn)\\x^2-2x+2019=0(vn)\\x^2-2x+2011=0(vn)\\x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có: $x>3$ thì $f'(x)<0$.

Mà $\sqrt{x^2-2x+2020}\geq\sqrt{2019}>3$ nên $f'\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right)<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\sqrt{2019})$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ chỉ có một cực đại.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-3y+2z-15=0$ và ba điểm $A(1;2;0)$, $B(1;-1;3)$, $C(1;-1;-1)$. Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc (P) sao cho $2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất. Giá trị $2x_0+3y_0+z_0$ bằng

A. 10. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

Xét điểm I thỏa $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ suy ra $I(1;2;-2)$.

$2MA^2-MB^2+MC^2=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=2MI^2+2IA^2-IB^2+IC^2$.

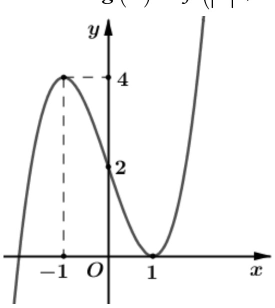
$2MA^2-MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I lên (P).

Lúc đó, đường thẳng MI có phương trình $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-3t \\ z=-2+2t \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x_0=1+3t \\ y_0=2-3t \\ z_0=-2+2t \end{cases}$.

Mà $3x_0-3y_0+2z_0-15=0 \Leftrightarrow 3(1+3t)-3(2-3t)+2(-2+2t)-15=0 \Leftrightarrow t=1$.

$2x_0+3y_0+z_0=2(1+3t)+3(2-3t)+(-2+2t)=6-t=5$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị.



A. $m<-1$. **B.** $m>-1$. **C.** $m>1$. **D.** $m<1$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Hàm $g(x)=f(|x|+m)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục $Oy \Rightarrow x=0$ là một điểm cực trị của hàm số.

Ta có $g'(x)=\dfrac{x}{|x|}.f'(|x|+m)$ với $x=0$.

$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(|x|+m)=0 \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \left[\begin{array}{l} |x|+m=1 \\ |x|+m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|=1-m \\ |x|=-1-m \end{array}\right.$. (*)

Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ (*) có 4 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ -1-m>0 \\ 1-m \neq -1-m \end{cases} \Leftrightarrow m<-1.$$

Câu 32. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2+2(m+3)x-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m\in(-3;5)$. **B.** $m\in(5;+\infty)$.

C. $m\neq 3$. **D.** $m\in(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(m-3)x^2+2(m+3)x-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khi:

$$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3\neq 0 \\ 2m^2+4m+6>0,\ \forall m\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 3.$$

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;0]$ thỏa mãn $f(x)+2f(-x-1)=6x^2+9x+9$. Tính $\int_{-2}^{0} xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\frac{13}{3}$. **B.** $-\frac{74}{3}$. **C.** $-\frac{26}{3}$. **D.** $\frac{22}{3}$.

Lời giải

Ta có: $f(x)+2f(-x-1)=6x^2+9x+9 \Rightarrow \begin{cases} f(-1)+2f(0)=6 \\ f(0)+2f(-1)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1)=4 \\ f(0)=1 \end{cases}$

$$f(x)+2f(-x-1)=6x^2+9x+9 \Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)dx+2\int_{-1}^{0} f(-x-1)dx=\int_{-1}^{0}(6x^2+9x+9)dx=\frac{13}{2}$$

Mà $\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0} f(-x-1)dx$ nên suy ra $\int_{-1}^{0} f(x)dx=\frac{13}{6}$

$$\int_{-2}^{0} xf'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 2xf\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{-2}^{0} - 2\int_{-2}^{0} f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 16-2\int_{-2}^{0} f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 16-4\int_{-2}^{0} f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}\frac{x}{2}=\frac{22}{3}$$

Câu 34. Một lớp học có 30 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn một ban cán sự lớp gồm có 3 học sinh. Tính xác suất để ban cán sự lớp có cả nam và nữ.

A. $\frac{435}{988}$. **B.** $\frac{135}{988}$. **C.** $\frac{285}{494}$. **D.** $\frac{5750}{9880}$.

Lời giải

Chọn C

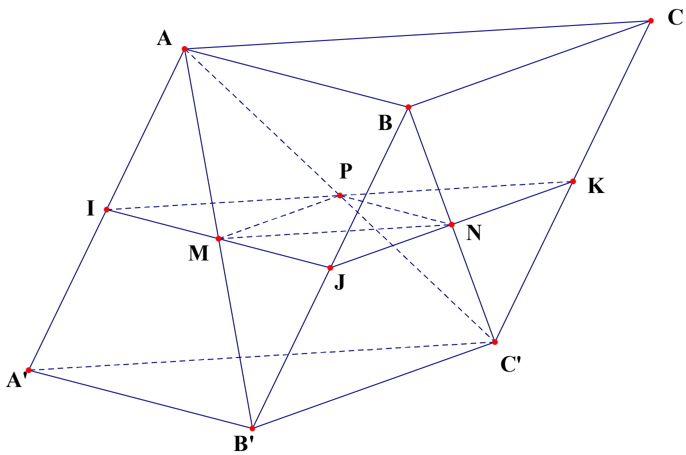
- Ta có $n(\Omega)=C_{40}^3$.
- Gọi A là biến cố: "3 học sinh trong ban cán sự lớp có cả nam và nữ"
- $n(A)=C_{30}^1.C_{10}^2+C_{30}^2.C_{10}^1$
- $P(A)=\dfrac{C_{30}^1.C_{10}^2+C_{30}^2.C_{10}^1}{C_{40}^3}=\dfrac{15}{26}=\dfrac{285}{494}$

Câu 35. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và diện tích đáy bằng 3. Gọi M, N, P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $BCC'B'$ và $CAA'C'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. 6. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_{ABC.A'B'C'}=3.4=12$. Gọi I,J,K lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC'.
$\Rightarrow V_{ABC.IJK}=6$.

Áp dụng bài toán tỷ số thể tích ta có: $\dfrac{V_{A.IMP}}{V_{A.A'B'C'}}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow V_{A.IMP}=\dfrac{1}{8}V_{A.A'B'C'}=\dfrac{1}{2}$

Dễ thấy $V_{A.IMP}=V_{B.MNJ}=V_{C.NPK}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $V_{ABC.MNP}=V_{ABC.IJK}-3V_{A.IMP}=6-3.\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$.

B. ĐIỀN KHUYẾT (15 CÂU)

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x-3}$ có đồ thị là (H). Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (H) với trục hoành là:

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Giao điểm của (H) với trục hoành là $A(2;0)$. Ta có: $y'=\dfrac{-2}{(x-3)^2}\Rightarrow y'(2)=-2$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-2(x-2)$ hay $y=-2x+4$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)^5(x-3)^7$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Ta có

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow x(x-1)^2(x-2)^5(x-3)^7=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy $f'(x)$ có 3 lần đổi dấu nên hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+y-2z-5=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{3}$. Gọi A là giao điểm của Δ và (P); và M là điểm thuộc đường thẳng Δ sao cho $AM=\sqrt{84}$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P).

Đáp án: ………….

Lời giải

Ta có: $\sin(\Delta,(P))=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

Gọi H là hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng. Khi đó ta có tam giác ΔAMH là tam giác vuông tại H nên $\sin(\Delta,(P))=\sin\widehat{MAH}=\dfrac{MH}{MA}\Rightarrow MH=3$.

Câu 39. Tổ của An và Cường có 7 học sinh. Số cách xếp 7 học sinh ấy theo hàng dọc mà An đứngđầu hàng, Cường đứng cuối hàng là:

Đáp án: ………….

Lời giải

Chọn An đứng đầu hàng có 1 cách, chọn Cường đứng cuối hàng có 1 cách.
Sắp xếp 5 bạn còn lại có: $P_5=5!=120$ cách.
Vậy có: $1.1.120=120$ cách.

Câu 40. Cho $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{1-x^2}=14.$ Giới hạn của $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3f(x)-2}-2}{x-1}$ là:

Đáp án: ………….

Lời giải

Ta có:
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{1-x^2}=14$ suy ra $f(1)=2$
Theo đề bài ta có:

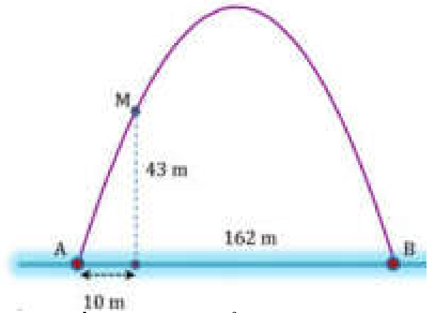
$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3f(x)-2}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(3f(x)-2-4)(x+1)}{(x^2-1)\left(\sqrt{3f(x)-2}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{f(x)-2}{1-x^2}.\frac{-3(x+1)}{\sqrt{3f(x)-2}+2}\right]$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{1-x^2}=14$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-3(x+1)}{\sqrt{3f(x)-2}+2}=\dfrac{-3.2}{\sqrt{3f(1)-2}+2}=\dfrac{-3.2}{2+2}=\dfrac{-3}{2}$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3f(x)-2}-2}{x-1}=14.\left(\dfrac{-3}{2}\right)=-21$

Câu 41. Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng $162m$. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao $43m$ so với mặt đất, người ta thả một sợi dây chạm đất. Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn $10m$. Giả sử các số liệu trên là chính xác

Gọi h là chiều cao của cổng. Hãy tính chiều cao của cổng.

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A \equiv O, AB \equiv Ox$. Ta có: $A \equiv O(0;0), B(162;0), M(10;43)$.

Gọi phương trình parabol là: $y = ax^2 + bx + c$.

Vì $A, B, \mathrm{M} \in$ parabol ta có: $\begin{cases} c = 0 \\ 162^2 a + 162b + c = 0 \\ 100a + 10b + c = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 162a + b = 0 \\ 10a + b = 43 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{43}{152} \\ b = \dfrac{3483}{76} \\ c = 0 \end{cases}$

Vậy phương trình parabol là: $y = -\dfrac{43}{152}x^2 + \dfrac{3483}{76}x$. Do đó chiều cao của cổng là: $x = -\dfrac{b}{2a} = 81 \Rightarrow h = 185,6m$.

Câu 42. Tìm tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 2018$ không có cực trị.

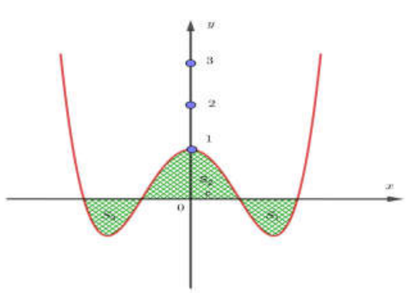
Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m + 2$

Để hàm số đã cho không có cực trị khi phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép hay $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow m^2 - (m+2) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le m \le 2$.

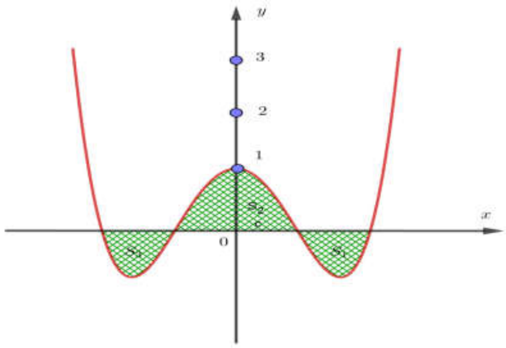
Câu 43. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m), với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Biết tồn tại duy nhất giá trị $m = \dfrac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản sao cho $S_1 + S_3 = S_2$. Đặt $T = a + b$. Mệnh đề nào đúng ?

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải



Giả sử x_1 là nghiệm lớn nhất của phương trình $x^4-3x^2+m=0$.

Suy ra $m=-x^4+3x^2$ (1).

Vì $\begin{cases} S_1+S_3=S_2 \\ S_1=S_3 \end{cases} \Rightarrow S_2=2S_3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}S_2-S_3=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^{x_1} f(x).dx=0$

Ta có $\int\limits_0^{x_1} f(x)dx=\int\limits_0^{x_1}(x^4-3x^2+m)dx=\frac{x_1^5}{5}-x_1^3+mx_1=x_1(\frac{x_1^4}{5}-x_1^2+m)$

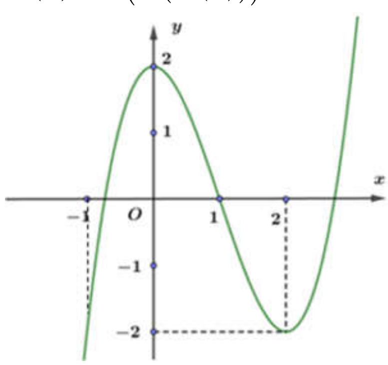
Do đó $x_1(\frac{x_1^4}{5}-x_1^2+m)=0 \Leftrightarrow \frac{x_1^4}{5}-x_1^2+m=0$ (2), vì $(x_1>0)$

Từ (1), (2) suy ra: $\frac{x_1^4}{5}-x_1^2-x_1^4+3x_1^2=0 \Leftrightarrow -4x_1^4+10x_1^2=0 \Leftrightarrow x_1^2=\frac{5}{2}$

Suy ra: $m=-x_1^4+3x_1^2=\frac{5}{4} \Rightarrow a=5; b=4$

Vậy $T=a+b=9$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x)=f\left(f\left(f(x)\right)\right)$.



Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ trên nửa khoảng $(-\infty;2]$ là

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

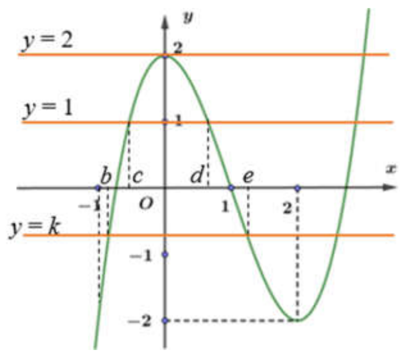
Dựa vào đồ thị ta thấy: $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=k\in(-1;0) \\ x=a\in(2;3) \end{array}\right.$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

$x\in(-\infty;2] \Rightarrow f(x)\in(-\infty;2] \Rightarrow f\left(f(x)\right)\in(-\infty;2]$

* $g(x)=f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ với $x\in(-\infty;2]$

$g'(x)=f'(x).f'\left(f(x)\right).f'\left(f\left(f(x)\right)\right)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(f(x))=0 \\ f'(f(f(x)))=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \\ f(f(x))=0 \\ f(f(x))=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \\ f(x)=k \\ f(x)=1 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \\ f(x)=k \\ f(x)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=1 \\ x=k \\ x=0 \\ x=b \\ x=e \\ x=c \\ x=d \end{array}\right.$$



Vậy, phương trình $g'(x)=0$ có 8 nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;2]$.

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích

Đáp án: ………….

Lời giải

$w=2z+1-i \Rightarrow z=\dfrac{w-1+i}{2}$

$|z-3+4i|\le 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{w-1+i}{2}-3+4i\right|\le 2 \Leftrightarrow |w-1+i-6+8i|\le 4 \Leftrightarrow |w-7+9i|\le 4\ (1)$

Giả sử $w=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$, khi đó $(1)\Leftrightarrow (x-7)^2+(y+9)^2\le 16$

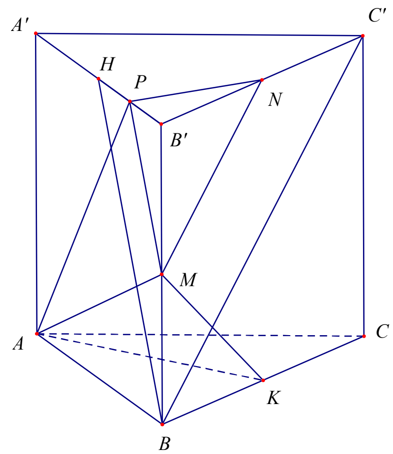
Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7;-9)$, bán kính $r=4$.

Vậy diện tích cần tìm là $S=\pi.4^2=16\pi$.

Câu 46. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên $AA'=a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB', $B'C'$. Lấy điểm P thuộc $A'B'$ sao cho $PB'=\dfrac{a}{4}$. Tính tan góc giữa đường thẳng AP và mặt phẳng (MNP)

Đáp án: ………….

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của $A'B'$.
Khi đó ta có $HB//PM$, $HB \perp AM$. Suy ra $AM \perp MP$ (1)
Mặt khác ta có $BC' \perp MK$, $BC' \perp AK$ (vì $AK \perp (BCB')$)

$\Rightarrow BC' \perp (AMK) \Rightarrow MN \perp AM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AM \perp (MNP)$. Vậy góc giữa đường thẳng AP và mặt phẳng (MNP) là góc $\widehat{APM}$.

Ta có $AM = \sqrt{AB^2 + MB^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

$MP = \sqrt{B'M^2 + B'P^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}a$

Suy ra $\tan \widehat{APM} = \frac{AM}{PM} = 2$.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho 3 điểm $A(1;2;3), B(0;1;1), C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị của biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(Q): 2x - y - 2z + 3 = 0$?

Đáp án: $\boxed{\text{.............}}$

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}(1-a;2-b;3-c), \overrightarrow{IB}(-a;1-b;1-c), \overrightarrow{IC}(1-a;-b;-2-c)$

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a-2a+3-3a=0 \\ 2-b+2-2b-3b=0 \\ 3-c+2-2c-6-3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a=4 \\ 6b=4 \\ 6c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=-\frac{1}{6} \end{cases} \quad I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{6}\right).$$

Ta chứng minh được $T = 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2$. Do đó *T* đạt *GTNN* khi MI đạt *GTNN* $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của *I* trên mặt phẳng (*P*).

Ta có $MI:\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}+t \\ y=\dfrac{2}{3}+t \\ z=-\dfrac{1}{6}+t \end{cases}$, $M\in MI\Rightarrow M\left(t+\dfrac{2}{3};t+\dfrac{2}{3};t-\dfrac{1}{6}\right), M\in(P)\Rightarrow 3t+\dfrac{19}{6}=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{19}{18}$

$\Rightarrow M\left(-\dfrac{7}{18};-\dfrac{7}{18};-\dfrac{11}{9}\right)\Rightarrow d\left(M;(Q)\right)=\dfrac{\left|-\dfrac{7}{9}+\dfrac{7}{18}+\dfrac{22}{9}+3\right|}{3}=\dfrac{91}{54}$.

Câu 48. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log(x+2y)=\log x+\log y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}}}.e^{\frac{y^2}{1+x}}$.

Đáp án: ....

Lời giải

Từ $\log(x+2y)=\log x+\log y=\log(xy)\Rightarrow x+2y=xy$.

Biến đổi $P=\sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}}}.e^{\frac{y^2}{1+x}}=e^{\frac{x^2}{4(2y+1)}}.e^{\frac{y^2}{x+1}}=e^{\frac{x^2}{4(2y+1)}+\frac{y^2}{x+1}}=e^{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2y+1}+\frac{y^2}{x+1}}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có

$$\left[(2y+1)+(x+1)\right]\left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2y+1}+\frac{y^2}{x+1}\right]\ge\left(\frac{x}{2}+y\right)^2\Rightarrow\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2y+1}+\frac{y^2}{x+1}\ge\frac{\left(\frac{x}{2}+y\right)^2}{x+2y+2}=\frac{(x+2y)^2}{4(x+2y+2)}.$$

Áp dụng BĐT Côsi ta có $xy=x+2y\ge 2\sqrt{x.2y}\Rightarrow x^2y^2\ge 8xy\Rightarrow xy\ge 8\Rightarrow x+2y\ge 8$.

Khi đó $\dfrac{(x+2y)^2}{4(x+2y+2)}-\dfrac{8}{5}=\dfrac{5(x+2y)^2-32(x+2y)-64}{20(x+2y+2)}=\dfrac{(x+2y-8)\left[5(x+2y)+8\right]}{20(x+2y+2)}\ge 0$

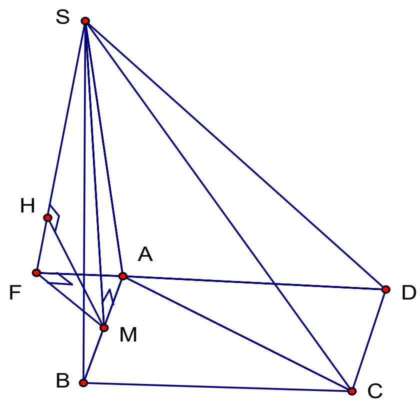
$\Rightarrow\dfrac{(x+2y)^2}{4(x+2y+2)}\ge\dfrac{8}{5}\Rightarrow\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2y+1}+\dfrac{y^2}{x+1}\ge\dfrac{8}{5}\Rightarrow P\ge e^{\frac{8}{5}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=4$, $y=2\Rightarrow \min P=e^{\frac{8}{5}}$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{ABC}=60^0$. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Kí hiệu $d(BC,SD)$ là khoảng cách giữa 2 đường thẳng CD và SA. Khẳng định nào sau đây đúng ?

Đáp án: ....

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB. Ta được $SM \perp (ABCD)$

Ta có $AC // AD$ nên $d(BC, SD) = d(BC,(SAD)) = d(B,(SAD)) = 2d(M,(SAD))$.

Vì $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{ABC} = 60^0$ nên ΔABC đều cạnh a.

Kẻ $MF \perp AD$; $MH \perp SF$. Ta có $AF \perp (SMF) \Rightarrow AF \perp MH$ (1).

Ta lại có $MH \perp SF$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $MH \perp (SAD)$.

Xét tam giác MFA, ta có: Sin $\widehat{FAM} = \dfrac{MF}{MA} \Rightarrow MF = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

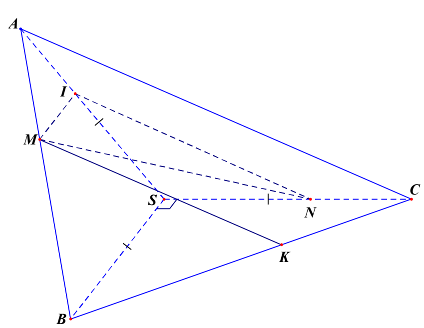
Xét tam giác SFA, ta có: $\dfrac{1}{MH^2} = \dfrac{1}{SM^2} + \dfrac{1}{MF^2} = \dfrac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \dfrac{1}{\frac{3a^2}{16}} = \dfrac{20}{3a^2} \Rightarrow MH = \dfrac{\sqrt{15}a}{10}$.

Vậy $d(BC, SD) = 2MH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60°$, $\widehat{BSC} = 90°$, $\widehat{CSA} = 120°$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AB và SC sao cho $\dfrac{CN}{SC} = \dfrac{AM}{AB}$. Khi khoảng cách giữa M và N nhỏ nhất, tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

Đáp án: ………….

Lời giải



Dựng $MK // AC$ $(K \in BC)$; $MI // SB$ $(I \in SA)$.

Khi đó: $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AI}{SA} = \dfrac{NC}{SC} = x \Rightarrow IN \parallel MK \Rightarrow \cos(AC; SB) = \cos(IM; MK)$.

Ta có $\cos(AC; SB) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{SB}\right|}{AC.SB}$ và $AC = a\sqrt{3}, SB = a$

Lại có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{SB} = \left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC}\right).\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AS}.\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB} = AS.SB.\cos 120° + SC.SB\cos 90° = -\dfrac{a^2}{2}$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{SB}\right| = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \cos\left(AC, SB\right) = \frac{\frac{a^2}{2}}{a^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \cos\widehat{IMK} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ hay } \cos\widehat{IMK} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

TH1: $\cos\widehat{IMK} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Ta có $MN^2 = MI^2 + MK^2 + 2MI.MK.\frac{\sqrt{3}}{6} = a^2x^2 + 3a^2(1-x)^2 + 2a^2x^2.\sqrt{3}a(1-x).\frac{\sqrt{3}}{6}$

$= a^2\left[x^2 + 3(1-x)^2 + x(1-x)\right]$

$= a^2\left[3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}\right] \geq \frac{11a^2}{12}$.

Do đó $MN_{\min} = \frac{11a^2}{12} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$.

Vậy $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SN}{SC}.\frac{AM}{AB} \Rightarrow V_{SAMN} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.\frac{1}{6}.\frac{5}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{432}a^3$.

TH2: $\cos\widehat{IMK} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$

Ta có $MN^2 = MI^2 + MK^2 + 2MI.MK.\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = a^2x^2 + 3a^2(1-x)^2 + 2a^2x^2.\sqrt{3}a(x-1).\frac{\sqrt{3}}{6}$

$= a^2\left[x^2 + 3(1-x)^2 + x(x-1)\right]$

$= a^2\left[5\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{11}{20}\right] \geq \frac{11a^2}{20}$.

Do đó $MN_{\min} = \frac{11a^2}{20} \Leftrightarrow x = \frac{7}{10}$

Vậy $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SN}{SC}.\frac{AM}{AB} \Rightarrow V_{SAMN} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.\frac{3}{10}.\frac{7}{10} = \frac{7\sqrt{2}}{400}$.