ĐỀ SỐ 8. ÔN THI ĐGNL ĐHQG HÀ NỘI 2021-2022

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

A. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (35 CÂU)

Câu 1. Số trái cam hái được từ 4 cây cam trong vườn là: 2; 8; 12; 16. Số trung vị là

A. 5 **B.** 10 **C.** 14 **D.** 9,5

Câu 2. Một xe ô tô đang chuyển động đều với vận tốc 16 m/s thì người lái xe nhìn thấy một chướng ngại vật nên đạp phanh tại điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+16$ trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ lúc đạp phanh. Quãng đường mà ô tô đi được trong 10 giây cuối cùng bằng

A. $160m$. **B.** $96m$. **C.** $60m$. **D.** $64m$.

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x \ge 4$ là

A. $[2;+\infty)$. **B.** $(16;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $[16;+\infty)$.

Câu 4. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x+\sqrt{y-1}=1 \\ 2y+\sqrt{x-1}=1 \end{cases}$ có bao nhiêu cặp nghiệm $(x;y)$?

A. 3. **B.** Vô nghiệm. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 5. Cho A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $6-3i$; $(1+2i)i$; $\frac{1}{i}$. Tìm số phức có điểm biểu diễn D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $z=4-2i$. **B.** $z=8-5i$. **C.** $z=-8+3i$. **D.** $z=-8-4i$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1), B(2;-1;0)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là.

A. $x-2y-z-4=0$. **B.** $x-2y-z+2=0$.

C. $x-z+2=0$. **D.** $x-2y-z=0$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x+3y-2z+24=0$ và điểm $A(2;5;1)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của A trên (P).

A. $H(4;2;-3)$. **B.** $H(4;-2;3)$. **C.** $H(-4;2;3)$. **D.** $H(4;2;3)$.

Câu 8. Bất phương trình $(x^2-3x-4)\sqrt{x^2-5}<0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 9. Nghiệm của phương trình lượng giác: $\cos^2 x-\cos x=0$ thỏa điều kiện $0<x<\pi$ là:

A. $x=\frac{-\pi}{2}$. **B.** $x=0$. **C.** $x=\pi$. **D.** $x=\frac{\pi}{2}$.

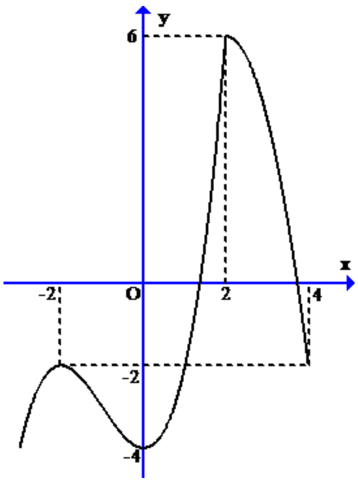
Câu 10. Litva sẽ tham gia vào cộng đồng chung châu Âu sử dụng đồng Euro là đồng tiền chung vào ngày 01 tháng 01 năm 2015. Để kỷ niệm thời khắc lịch sử này, chính quyền đất nước này quyết định dùng 122550 đồng tiền xu Litas Lithuania cũ của đất nước để xếp một **mô hình kim tự tháp** (như hình vẽ bên dưới). Biết rằng tầng dưới cùng có 4901 đồng và cứ lên thêm một tầng thì số đồng xu giảm đi 100 đồng. Hỏi mô hình Kim tự tháp này có tất cả bao nhiêu tầng?

A. 55. **B.** 54. **C.** 50. **D.** 49.

Câu 11. Hàm số nào dưới đây không là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$?

A. $\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$. **B.** $\dfrac{x^2}{x+1}$. **C.** $\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$. **D.** $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

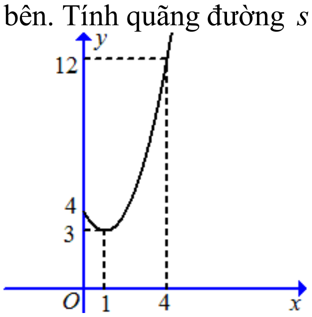
Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$?

A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 13. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/ h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;3)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s=\dfrac{50}{3}$ (km).. **B.** $s=10$ (km).. **C.** $s=20$ (km).. **D.** $s=\dfrac{64}{3}$ (km).

Câu 14. Ông Toán gửi vào một ngân hàng 100 triệu đồng theo thể thức lãi suất kép với lãi suất $0{,}8\%$/tháng. Biết lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình gửi. Hỏi sau đúng một năm kể từ lúc bắt đầu gửi tiền vào ngân hàng ông Toán thu được tất cả bao nhiêu tiền (gồm cả gốc và lãi)?

A. $109{,}6$ triệu đồng. **B.** $109{,}161$ triệu đồng.

C. $110{,}034$ triệu đồng. **D.** $110{,}914$ triệu đồng.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\log_2 x=3$ là

A. $x=6$. **B.** $x=5$. **C.** $x=9$. **D.** $x=8$.

Câu 16. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1-x^2$ và $y=0$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V=\dfrac{16}{15}\pi$. **B.** $V=\dfrac{16}{5}\pi$. **C.** $V=\dfrac{6}{5}\pi$. **D.** $V=\dfrac{6}{15}\pi$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-2}$.
Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

A. $m \le -2$. **B.** $m < -2$. **C.** $m > -2$. **D.** $m \ge -2$.

Câu 18. Gọi A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2. Khi đó độ dài của véctơ $\overrightarrow{AB}$ bằng

A. $|z_2 + z_1|$. **B.** $|z_1| - |z_2|$. **C.** $|z_1| + |z_2|$. **D.** $|z_2 - z_1|$.

Câu 19. Cho số phức $w = (1+i)z + 2$ biết $|1 + iz| = |z - 2i|$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w trên mặt phẳng phức là một đường thẳng.
B. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w trên mặt phẳng phức là một đường tròn.
C. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w trên mặt phẳng phức là một đường elip.
D. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w trên mặt phẳng phức là 2 điểm.

Câu 20. Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2t \end{cases}$ và điểm $M(3;3)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng Δ là:

A. $(4;-2)$. **B.** $(1;0)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(7;-4)$.

Câu 21. Bán kính của đường tròn tâm $I(0;-2)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 23 = 0$ là:

A. $\frac{3}{5}$. **B.** 3. **C.** 15. **D.** 5.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(-4;1;2)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x - 3y + z - 4 = 0$ và $(R): 2x - y + 3z + 1 = 0$. Phương trình của (P) là

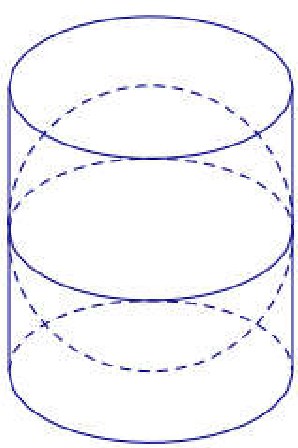
A. $8x + y - 5z + 41 = 0$. **B.** $8x - y - 5z - 43 = 0$.
C. $8x - y + 5z + 23 = 0$. **D.** $4x + y - 5z + 25 = 0$.

Câu 23. Người ta cắt một tấm bìa hình tròn thành ba tấm bìa hình quạt bằng nhau. Với mỗi tấm bìa hình quạt, người ta quấn và dán thành một cái phễu hình nón (giả sử diện tích mép dán không đáng kể). Biết bán kính tấm bìa hình tròn là $60\,\text{cm}$. Tính thể tích V của mỗi cái phễu.

A. $V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ lít. **B.** $V = \frac{16000\sqrt{2}}{3}$ lít.

C. $V = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. **D.** $V = \frac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

Câu 24. Bên trong một khối trụ có một khối cầu nội tiếp khối trụ như hình vẽ bên. Gọi V_1 là thể tích của khối trụ và V_2 là thể tích của khối cầu. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$?



A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = 2$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = 3$.

Câu 25. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của AB, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng.

A. $\frac{3\sqrt{5}a^3}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}a^3}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}a^3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}a^3}{2}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là điểm thuộc cạnh SA (không trùng với S hoặc A). (P) là mặt phẳng qua OM và song song với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp là

A. Hình thang. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình tam giác. **D.** Hình bình hành.

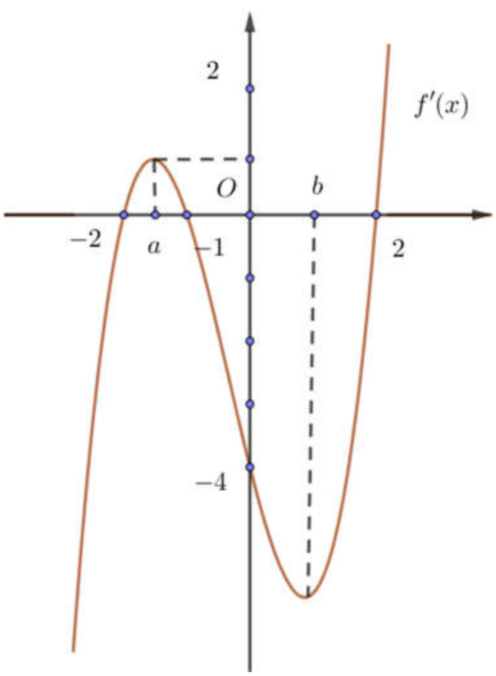
Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;1;-1)$, $B(14;-3;3)$ và đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;2)$. Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của A và B lên Δ. Mặt cầu đi qua hai điểm C, D có diện tích nhỏ nhất là

A. 44π. **B.** 6π. **C.** 9π. **D.** 36π.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y+2z+3=0$. Phương trình đường thẳng a nằm trong (P), cắt và vuông góc với d là.

A. $\begin{cases}x=1+4t\\y=-4+3t\\z=2+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+4t\\y=-3-3t\\z=1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-4t\\y=-4+3t\\z=2-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-4t\\y=-4-3t\\z=2+t\end{cases}$.

Câu 29. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$, biết $f'(x)$ có hai điểm cực trị $x=a\in(-2;-1)$ và $x=b\in(1;2)$. Hỏi hàm số $g(x)=2019f(f'(x))+2020$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 10. **B.** 13. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$, $B(5;4;4)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-z+6=0$ Nếu M thay đổi thuộc (P) thì giá trị nhỏ nhất của MA^2+MB^2 là

A. 60. **B.** 50. **C.** $\frac{200}{3}$. **D.** $\frac{2968}{25}$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=3\left(x+1\right)\left(x-3\right)$ và $f\left(-1\right)=0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x\right)+\dfrac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 62. **B.** 63. **C.** 64. **D.** 65.

Câu 32. Tìm tất cả các số thực m để phương trình $\left(mx^2+2x-m+1\right)\sqrt{x}=0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m<0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<0 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le 0 \end{array}\right.$. **D.** $0<m<1$.

Câu 33. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$ và thỏa mãn $x^2f^2\left(x\right)+\left(2x-1\right)f\left(x\right)=xf'\left(x\right)-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$ và $f\left(1\right)=-2$. Tính $\int\limits_1^2 f\left(x\right)dx$.

A. $-\dfrac{1}{2}-\ln 2$. **B.** $-\dfrac{3}{2}-\ln 2$. **C.** $-1-\dfrac{\ln 2}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}$.

Câu 34. Cho tập A gồm các số tự nhiên có 2021 chữ số, sao cho trong mỗi số đó chỉ có mặt chữ số 0 hoặc 1. Chọn ngẫu nhiên từ tập A một số. Tính xác suất để số được chọn thỏa mãn số chữ số 1 có mặt là chữ số lẻ.

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{2^{2019}}$ **C.** $\dfrac{1}{2^{2020}}$ **D.** $\dfrac{1}{4}$

Câu 35. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', CC', BC. Mặt phẳng $\left(MNP\right)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Thể tích phần có chứa đỉnh B' bằng

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{19a^3\sqrt{3}}{48}$. **D.** $\dfrac{11a^3\sqrt{3}}{48}$.

B. ĐIỀN KHUYẾT (15 CÂU)

Câu 36. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3-4x+1$ tại điểm có hoành độ bằng 2 có phương trình là

Đáp án: ....

Câu 37. Hàm số $y=-4x^4+3x^2+5$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

Đáp án: ....

Câu 38. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right):\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z+1\right)^2=5$ và mặt phẳng $\left(P\right):2x-y-2z-1=0$. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng $\left(P\right)$ là.

Đáp án: ....

Câu 39. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

Đáp án: ....

Câu 40. Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=-1$. Tính $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2+x\right)f(x)+2}{x-1}$

Đáp án: ....

Câu 41. Có một cái cổng hình Parabol. Người ta đo khoảng cách giữa hai chân cổng BC là $10m$. Từ một điểm M trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là $MK=18m$ và khoảng cách tới chân cổng gần nhất là $BK=1m$. Chiều cao AH của cổng là

Đáp án: ....

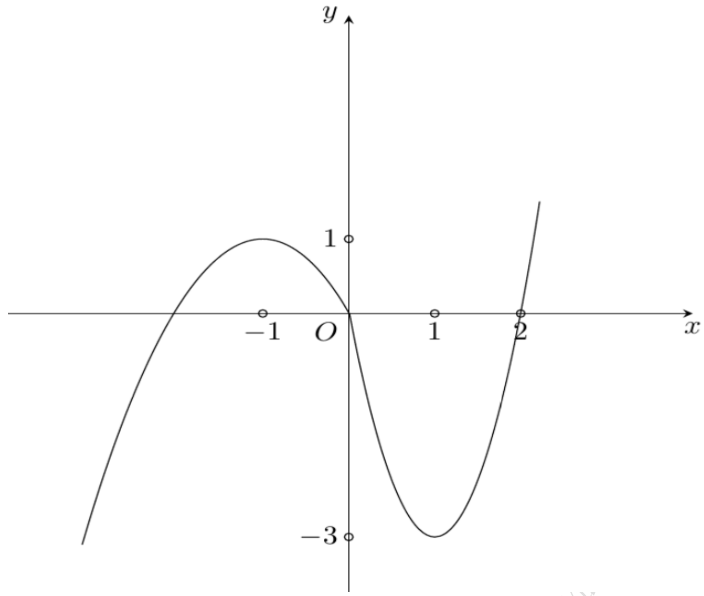
Câu 42. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 - m^3x^2 + 2018$ có ba điểm cực trị

Đáp án: ....

Câu 43. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^{-x}$; $y = \frac{x}{3}$; $x = 0$ là $S = \frac{m}{3\ln 3} - \frac{n}{6}$. Tính tổng $m + n$.

Đáp án: ....

Câu 44. Cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ:



Phương trình $f\left(2 + f\left(e^x\right)\right) = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt?

Đáp án: ....

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w = (2 + 3i)\overline{z} + 3 + 4i$ là một đường tròn bán kính R. Tính R.

Đáp án: ....

Câu 46. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC cân đỉnh A, $\widehat{ABC} = \alpha$, BC' tạo đáy góc β. Gọi I là trung điểm của AA', biết $\widehat{BIC} = 90^0$. Tính $\tan^2\alpha + \tan^2\beta$

Đáp án: ....

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x + 2y + 2z + 18 = 0$, M là điểm di chuyển trên mặt phẳng (P); N là điểm nằm trên tia OM sao cho $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 24$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (P).

Đáp án: ....

Câu 48. Cho các số thức x, y với $x \geq 0$ thỏa mãn $e^{x+3y} + e^{xy+1} + x(y+1) + 1 = e^{-xy-1} + \frac{1}{e^{x+3y}} - 3y$.Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + 2y + 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Đáp án: ....

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AD = a$, $AB = 2a, BC = 3a,$ mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

Đáp án: ....

Câu 50. Một người cần làm một cái lăng kính hình lăng trụ tam giác đều từ tấm mica để có thể tích là $6\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. Để ít hao tốn vật liệu nhất thì cần tính độ dài các cạnh của khối lăng trụ tam giác đều này bằng bao nhiêu?

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots..}$

Lời giải tham khảo

A. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (35 CÂU)

Câu 1. Số trái cam hái được từ 4 cây cam trong vườn là: 2; 8; 12; 16. Số trung vị là

A.5 **B.** 10 **C.** 14 **D.** 9,5

Lời giải:

Chọn B ta thấy N chẵn nên số trung vị là: $M_e = \dfrac{8+12}{2} = 10$

Câu 2. Một xe ô tô đang chuyển động đều với vận tốc $16\,m/s$ thì người lái xe nhìn thấy một chướng ngại vật nên đạp phanh tại điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 16$ trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ lúc đạp phanh. Quãng đường mà ô tô đi được trong 10 giây cuối cùng bằng

A. $160m$. **B.** $96m$. **C.** $60m$. **D.** $64m$.

Lời giải

Chọn B

Lấy mốc thời gian lúc ô tô bắt đầu đạp phanh.

Khi ô tô dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow -2t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = 8$.

Quãng đường mà ô tô đi được trong 8 giây cuối: $\int_0^8 (-2t+16)\,dt = \left(-t^2 + 16t\right)\Big|_0^8 = 64\,(m)$.

Theo đề bài: ô tô đi được 10 giây cuối cùng nên 2 giây đầu ô tô đi được: $16.2 = 32m$.

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 10 giây cuối: $64 + 32 = 96m$.

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x \ge 4$ là

A. $[2;+\infty)$. **B.** $(16;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $[16;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_2 x \ge 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ge 2^4 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 16$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[16;+\infty)$.

Câu 4. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = 1 \\ 2y + \sqrt{x-1} = 1 \end{cases}$ có bao nhiêu cặp nghiệm $(x;y)$?

A. 3. **B.** Vô nghiệm. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện : $x, y \ge 1$

Ta có : $\begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = 1 \\ 2y + \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x - 2y + \sqrt{y-1} - \sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow 2(x-y) + \dfrac{y-x}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x-1} = 0}$

$\Rightarrow (x-y)\left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x-1}}\right) = 0$

Khi $x = y$ thì $2x + \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ x - 1 = (1-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Khi $\sqrt{y-1} + \sqrt{x-1} = \dfrac{1}{2}$ thì $2x + 2y + \dfrac{1}{2} = 2 \Rightarrow x + y = \dfrac{3}{4}$ (vô nghiệm vì $x, y \ge 1$)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(0;0)$.

Câu 5. Cho A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $6-3i$; $(1+2i)i$; $\frac{1}{i}$.Tìm số phức có điểm biểu diễn D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $z=4-2i$. **B.** $z=8-5i$. **C.** $z=-8+3i$. **D.** $z=-8-4i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $6-3i$ nên tọa độ $A(6;-3)$; $(1+2i)i=-2+i$ nên tọa độ $B(-2;1)$.

$\frac{1}{i}=-i$ nên tọa độ $C(0;-1)$.

Để $ABCD$ là hình bình hành: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ nên $\begin{cases} x-6=2 \\ y+3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-5 \end{cases}$.

Vậy D có điểm biểu diễn số phức là $z=8-5i$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1), B(2;-1;0)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là.

A. $x-2y-z-4=0$. **B.** $x-2y-z+2=0$.

C. $x-z+2=0$. **D.** $x-2y-z=0$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{AB}=(1;-2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng: $(x-1)-2(y-1)-(z-1)=0 \Leftrightarrow x-2y-z+2=0$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x+3y-2z+24=0$ và điểm $A(2;5;1)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của A trên (P).

A. $H(4;2;-3)$. **B.** $H(4;-2;3)$. **C.** $H(-4;2;3)$. **D.** $H(4;2;3)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) có một vtpt $\vec{n}=(6;3;-2)$.

Đường thẳng AH qua A và vuông góc với (P).

Suy ra phương trình đường thẳng AH là $\begin{cases} x=2+6t \\ y=5+3t \\ z=1-2t \end{cases}$.

$\Rightarrow H(2+6t;5+3t;1-2t)$

Mà $H\in(P) \Rightarrow 6(2+6t)+3(5+3t)-2(1-2t)+24=0. \Leftrightarrow \ t=-1$

Vậy $H(-4;2;3)$.

Câu 8. Bất phương trình $(x^2-3x-4)\sqrt{x^2-5}<0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

- Ta có: $(x^2-3x-4)\sqrt{x^2-5}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5>0 \\ x^2-3x-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>\sqrt{5} \\ x<-\sqrt{5} \end{array}\right. \\ -1<x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{5}<x<4$.

- Vậy BPT có 1 nghiệm nguyên dương duy nhất là $x=3$.

Câu 9. Nghiệm của phương trình lượng giác: $\cos^2 x-\cos x=0$ thỏa điều kiện $0<x<\pi$ là:

A. $x=\frac{-\pi}{2}$. **B.** $x=0$. **C.** $x=\pi$. **D.** $x=\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\cos^2 x-\cos x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k2\pi\end{array}\right.$$

Vì $0<x<\pi$ nên nhận $x=\frac{\pi}{2}$.

Câu 10. Litva sẽ tham gia vào cộng đồng chung châu Âu sử dụng đồng Euro là đồng tiền chung vào ngày 01 tháng 01 năm 2015. Để kỷ niệm thời khắc lịch sử này, chính quyền đất nước này quyết định dùng 122550 đồng tiền xu Litas Lithuania cũ của đất nước để xếp một **mô hình kim tự tháp** (như hình vẽ bên dưới). Biết rằng tầng dưới cùng có 4901 đồng và cứ lên thêm một tầng thì số đồng xu giảm đi 100 đồng. Hỏi mô hình Kim tự tháp này có tất cả bao nhiêu tầng?

A. 55. **B.** 54. **C.** 50. **D.** 49.

Lời giải

Chọn C

Gọi $u_n\,(n\in\mathbb{N}^*)$ số đồng xu tầng thứ n. Theo đề bài ta có (u_n) là cấp số cộng có $u_1=4901$, công sai $d=-100$ và $S_n=122550$.

Ta có $S_n=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d\Leftrightarrow 122550=4901n+\frac{n(n-1)}{2}.(-100)$

$$\Leftrightarrow 122550=4901n-50n^2+50n\Leftrightarrow -50n^2+4951n-122550=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=50\\ n=\frac{2451}{50}\ (l)\end{array}\right..$$

Vậy mô hình kim tự tháp có tổng cộng 50 tầng.

Câu 11. Hàm số nào dưới đây không là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$?

A. $\frac{x^2+x-1}{x+1}$. **B.** $\frac{x^2}{x+1}$. **C.** $\frac{x^2-x-1}{x+1}$. **D.** $\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

Lời giải

Chọn A

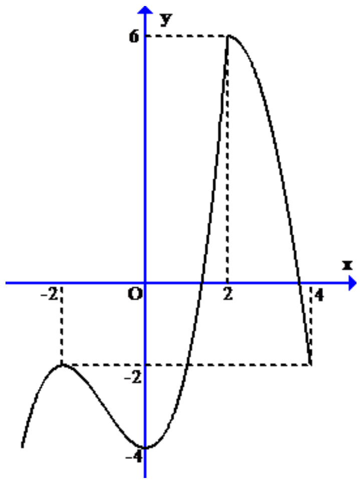
$$f(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}=1-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

$$\Rightarrow\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{x+1}+C$$

$$=\frac{x^2+x+1}{x+1}+C=\frac{x^2-x-1}{x+1}+2+C=\frac{x^2}{x+1}+1+C.$$

Do $\frac{x^2+x-1}{x+1}-\frac{x^2+x+1}{x+1}=-\frac{2}{x+1}$ không là hằng số với x tùy ý thuộc tập xác định nên $\frac{x^2+x-1}{x+1}$ không là một nguyên hàm của $f(x)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$?

A. 11. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}+1\right)+6\left(\frac{x}{2}+1\right)=3m+6 \Leftrightarrow f(t)+6t=3m+6$

Với $t=\frac{x}{2}+1$ và $x\in[-2;2]$ nên ta có $t\in[0;2]$.

Xét hàm số $y=f(t)+6t$ trên $[0;2]$.

Ta có $y'=f'(t)+6>0$, $\forall t\in[0;2]$.

Phương trình có nghiệm

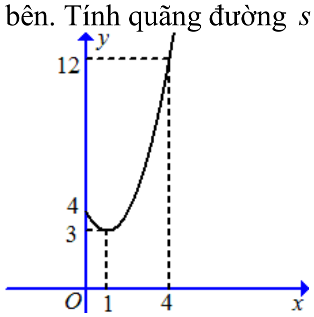
$\Leftrightarrow \min\limits_{[0;2]}(f(t)+6t)\le 3m+6\le \max\limits_{[0;2]}(f(t)+6t) \Leftrightarrow f(0)\le 3m+6\le f(2)+12$

$\Leftrightarrow -4\le 3m+6\le 6+12$

$\Leftrightarrow -\frac{10}{3}\le m\le 4$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Câu 13. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;3)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s=\frac{50}{3}$ (km).. **B.** $s=10$ (km).. **C.** $s=20$ (km).. **D.** $s=\frac{64}{3}$ (km).

Lời giải

Chọn D

Ta có $v(t)=at^2+bt+c$ có dạng parabol đỉnh $I(1;3)$, đi qua điểm $A(0;4)$ và $B(4;12)$.

$$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=1\\ a+b+c=3\\ v(0)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=1\\ a+b+c=3\\ 0+0+c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2a\\ a+b=-1\\ c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2a\\ a+(-2a)=-1\\ c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2\\ a=1\\ c=4\end{cases}$$

Do đó $v(t)=t^2-2t+4$.

Quãng đường vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát được tính như sau

$$s=\int_0^4 v(t)dt=\int_0^4(t^2-2t+4)dt=\left(\frac{t^3}{3}-t^2+4t\right)\Bigg|_0^4=\left(\frac{4^3}{3}-4^2+4.4\right)-0=\frac{64}{3}\text{ (km).}$$

Câu 14. Ông Toán gửi vào một ngân hàng 100 triệu đồng theo thể thức lãi suất kép với lãi suất $0,8\%$/tháng. Biết lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình gửi. Hỏi sau đúng một năm kể từ lúc bắt đầu gửi tiền vào ngân hàng ông Toán thu được tất cả bao nhiêu tiền (gồm cả gốc và lãi)?

A. $109,6$ triệu đồng. **B.** $109,161$ triệu đồng.

C. $110,034$ triệu đồng. **D.** $110,914$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn C

Số tiền Ông Toán thu được sau tháng đầu tiên là $100+100.0,8\%=100(1+0,8\%)$ triệu đồng.

Số tiền Ông Toán thu được sau tháng thứ hai là $100(1+0,8\%)+100(1+0,8\%).0,8\%=100(1+0,8\%)^2$ triệu đồng.

Tương tự, ta được số tiền Ông Toán thu được sau một năm là $100(1+0,8\%)^{12}=110,034$ triệu đồng.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\log_2 x=3$ là

A. $x=6$. **B.** $x=5$. **C.** $x=9$. **D.** $x=8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_2 x=3\Leftrightarrow x=2^3\Leftrightarrow x=8$.

Câu 16. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1-x^2$ và $y=0$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V=\frac{16}{15}\pi$. **B.** $V=\frac{16}{5}\pi$. **C.** $V=\frac{6}{5}\pi$. **D.** $V=\frac{6}{15}\pi$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $1-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.$.

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{16}{15}\pi.$$

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-2}$.

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

A. $m\le -2$. **B.** $m<-2$. **C.** $m>-2$. **D.** $m\ge -2$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. $f'(x)=\dfrac{2x^2-8x+6-m}{(x-2)^2}$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng xác định.

$\Leftrightarrow f'(x)\ge 0(\forall x\in D)\Leftrightarrow 2x^2-8x+6-m\ge 0(\forall x\in D)\Leftrightarrow 2(x-2)^2\ge m+2(\forall x\in D)$.

Suy ra $m+2\le 0\Leftrightarrow m\le -2$.

Câu 18. Gọi A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2. Khi đó độ dài của véctơ $\overrightarrow{AB}$ bằng

A. $|z_2+z_1|$. **B.** $|z_1|-|z_2|$. **C.** $|z_1|+|z_2|$. **D.** $|z_2-z_1|$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

Theo đề bài ta có $A(a;b)$, $B(c;d)$ $\Rightarrow AB=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$.

$z_2-z_1=(a-c)+(d-b)i \Rightarrow |z_2-z_1|=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$.

Câu 19. Cho số phức $w=(1+i)z+2$ biết $|1+iz|=|z-2i|$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w trên mặt phẳng phức là một đường thẳng.
B. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w trên mặt phẳng phức là một đường tròn.
C. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w trên mặt phẳng phức là một đường elip.
D. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w trên mặt phẳng phức là 2 điểm.

Lời giải

Chọn A

Gọi $w=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$, $\Rightarrow a+bi=(1+i)z+2\Leftrightarrow z=\dfrac{a-2+bi}{1+i}$ $\Leftrightarrow z=\dfrac{a+b-2}{2}+\dfrac{b-a+2}{2}i$.

Thay vào biểu thức ở đề ta được:

$\left|\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a+2}{2}i\right|=\left|\dfrac{a+b-2}{2}+\dfrac{b-a-2}{2}i\right|$ $\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2=a^2+b^2+4-2ab-4b+4a$.

$\Leftrightarrow a-b+1=0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w trên mặt phẳng phức là một đường thẳng.

Câu 20. Cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+3t\\y=-2t\end{cases}$ và điểm $M(3;3)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng Δ là:

A. $(4;-2)$. **B.** $(1;0)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(7;-4)$.

Lời giải.

Chọn B

Gọi H là hình chiếu của M trên Δ. Ta có:

$H\in\Delta\Rightarrow H(1+3t;-2t)$, $\overrightarrow{MH}=(-2+3t;-3-2t)$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-2)$.

$\overrightarrow{MH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 3(-2+3t)-2(-3-2t)=0\Leftrightarrow 13t=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow H(1;0)$.

Câu 21. Bán kính của đường tròn tâm $I(0;-2)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x-4y-23=0$ là:

A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** 3. **C.** 15. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

$R=d(I,\Delta)=\dfrac{|3.0-4.(-2)-23|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(-4;1;2)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q):x-3y+z-4=0$ và $(R):2x-y+3z+1=0$. Phương trình của (P) là

A. $8x+y-5z+41=0$. **B.** $8x-y-5z-43=0$.
C. $8x-y+5z+23=0$. **D.** $4x+y-5z+25=0$.

Lời giải

Ta có: $\vec{n}_{(Q)} = (1;-3;1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q).

$\vec{n}_{(R)} = (2;-1;3)$ là một vectơ pháp tuyến của (R).

Vì $(P) \perp (Q)$ nên $\vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(Q)}$,

$(P) \perp (R)$ nên $\vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(R)}$.

$\Rightarrow \vec{n}_{(P)} = \left[\vec{n}_{(Q)}, \vec{n}_{(R)}\right] = (-8;-1;5)$ một vectơ pháp tuyến của (P).

(P) đi qua điểm $M(-4;1;2)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (-8;-1;5)$ nên nó có phương trình là

$-8(x+4)-(y-1)+5(z-2)=0 \Leftrightarrow -8x-y+5z-41=0 \Leftrightarrow 8x+y-5z+41=0$.

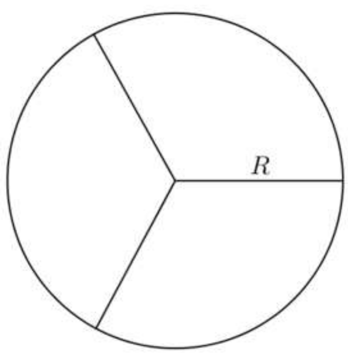
Câu 23. Người ta cắt một tấm bìa hình tròn thành ba tấm bìa hình quạt bằng nhau. Với mỗi tấm bìa hình quạt, người ta quấn và dán thành một cái phễu hình nón (giả sử diện tích mép dán không đáng kể). Biết bán kính tấm bìa hình tròn là $60\,\text{cm}$. Tính thể tích V của mỗi cái phễu.

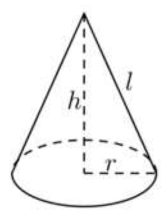
A. $V = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ lít. **B.** $V = \dfrac{16000\sqrt{2}}{3}$ lít.

C. $V = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. **D.** $V = \dfrac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

Lời giải

Chọn C





◆ Gọi R, r lần lượt là bán kính của đường tròn ban đầu và bán kính đường tròn đáy của hình nón; h, l là chiều cao và đường sinh của hình nón.

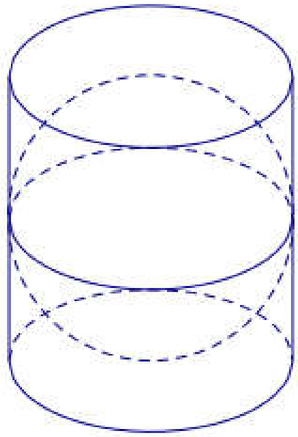
Ta có: $R = 60\,\text{cm} = 6\text{ dm}$, $l = R = 6\text{ dm}$.

◆ Chu vi đường tròn đáy của hình nón: $2\pi r = \dfrac{2\pi R}{3} \Rightarrow r = 2\,\text{dm}$.

◆ Chiều cao hình nón: $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 4\sqrt{2}\text{ dm}$.

Thể tích của mỗi khối nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.2^2.4\sqrt{2} = \dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít.

Câu 24. Bên trong một khối trụ có một khối cầu nội tiếp khối trụ như hình vẽ bên. Gọi V_1 là thể tích của khối trụ và V_2 là thể tích của khối cầu. Tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$?



A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=2$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=3$.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính mặt cầu là R khi đó bán kính trụ là R và chiều cao trụ là $h=2R$.

Ta có $V_1=\pi R^2h=2\pi R^3$; $V_2=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

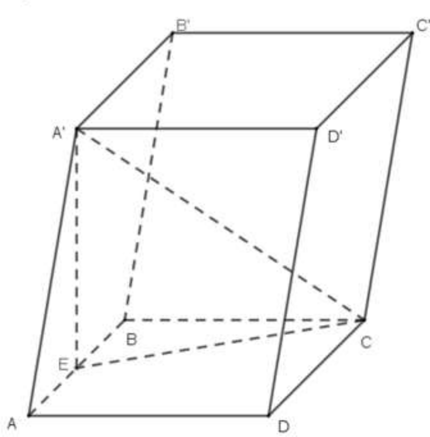
Suy ra $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2\pi R^3}{\dfrac{4}{3}\pi R^3}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 25. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của AB, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng.

A. $\dfrac{3\sqrt{5}a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a^3}{12}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi E là trung điểm của AB. Khi đó EC là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên $(ABCD)$ nên $\left(A'C;(ABCD)\right)=(A'C;EC)=\widehat{A'CE}=45^0$.

Xét tam giác EBC có $\hat{B}=90^0$ suy ra $EC=\sqrt{BC^2+BE^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác $A'EC$ vuông cân tại E nên $EC=A'E=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là a^2.

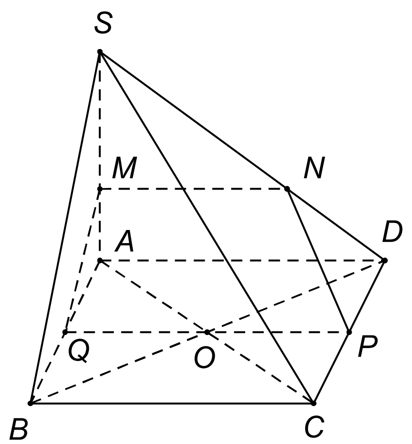
Thể tích của khối lăng trụ đã cho là $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{2}$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là điểm thuộc cạnh SA (không trùng với S hoặc A). (P) là mặt phẳng qua OM và song song với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp là

A. Hình thang. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình tam giác. **D.** Hình bình hành.

Lời giải

Chọn A



Qua M kẻ đường thẳng $MN\ //\ AD$ và cắt SD tại $N \Rightarrow MN\ //\ AD$

Qua O kẻ đường thẳng $PQ\ //\ AD$ và cắt AB, CD lần lượt tại $Q, P \Rightarrow PQ\ //\ AD$

Suy ra $MN\ //\ PQ\ //\ AD \Rightarrow M, N, P, Q$ đồng phẳng $\Rightarrow (P)$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang $MNPQ$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;1;-1)$, $B(14;-3;3)$ và đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;2)$. Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của A và B lên Δ. Mặt cầu đi qua hai điểm C, D có diện tích nhỏ nhất là

A. 44π. **B.** 6π. **C.** 9π. **D.** 36π.

Lời giải

Chọn C

Từ A dựng đường thẳng d song song với Δ. Gọi E là hình chiếu vuông góc của B trên d.

Ta có $CD=AE \Rightarrow AE$ không đổi.

Gọi R là bán kính mặt cầu $\Rightarrow CD\le 2R \Rightarrow R\ge \dfrac{CD}{2}=\dfrac{AE}{2}$.

Ta có $S_c=4\pi R^2\ge 4\pi\dfrac{AE^2}{4}=AE^2.\pi$.

Diện tích mặt cầu nhỏ nhất là $S_c=AE^2\pi$.

$AE=AB.\cos\varphi$ với $\varphi=\widehat{(d,AB)}$.

$\overrightarrow{AB}=(9;-4;4)$, $AB=\sqrt{9^2+4^2+4^2}=\sqrt{113}$.

$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}\right)\right| = \left|\dfrac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{AB.|\vec{u}|}\right| = \dfrac{3}{\sqrt{113}}$ $AE = \sqrt{119}.\dfrac{3}{\sqrt{113}} = 3$.

Diện tích nhỏ nhất mặt cầu là $S_c = 9\pi$

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2z+3=0$. Phương trình đường thẳng a nằm trong (P), cắt và vuông góc với d là.

A. $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = -4+3t \\ z = 2+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = -3-3t \\ z = 1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1-4t \\ y = -4+3t \\ z = 2-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1-4t \\ y = -4-3t \\ z = 2+t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

$d: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -3+t \\ z = 1-t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;\ 1;\ -1)$.Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;\ 2;\ 2)$.

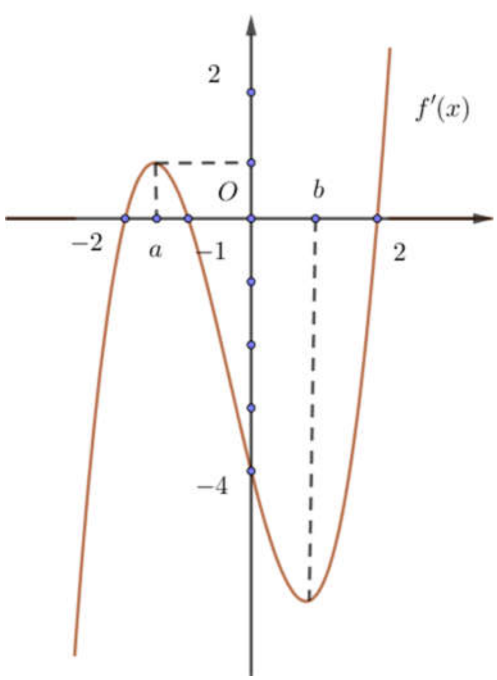
Vectơ chỉ phương của đường thẳng d : $\vec{v} = \left[\vec{u};\ \vec{n}\right] = (4;\ -3;\ 1)$.

Tọa độ giao điểm của d và (P) là:

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -3+t \\ z = 1-t \\ x+2y+2z+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 1 \\ y = -4 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Đường thẳng d cần tìm là: $\begin{cases} x = 1-4t \\ y = -4+3t \\ z = 2-t \end{cases}$.

Câu 29. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$, biết $f'(x)$ có hai điểm cực trị $x = a \in (-2;-1)$ và $x = b \in (1;2)$. Hỏi hàm số $g(x) = 2019f\left(f'(x)\right) + 2020$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 10. **B.** 13. **C.** 9. **D.** 11.

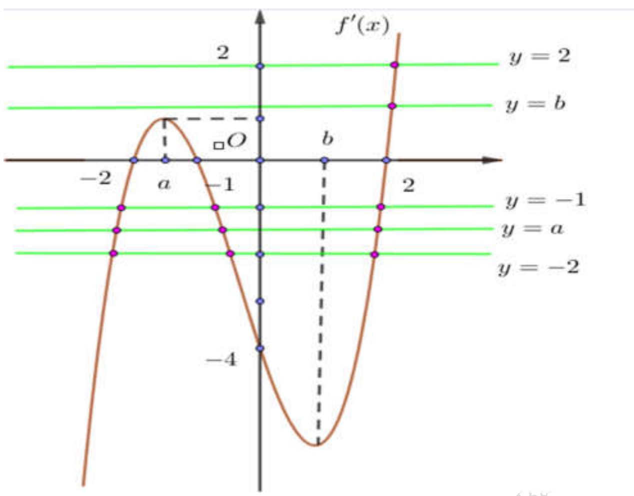
Lời giải

Chọn D

Ta có :

$g(x)=2019f(f'(x))+2020$; $g'(x)=2019f''(x).f'(f'(x))$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2019f''(x).f'(f'(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f''(x)=0\\f'(f'(x))=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=a\in(-2;-1)\\f'(x)=b\in(1;2)\\f'(x)=-2\\f'(x)=-1\\f'(x)=2\end{array}\right.$$



$f'(x)=a$ có 3 nghiệm $x_1;x_2;x_3$ phân biệt.

$f'(x)=b$ có 1 nghiệm x_4.

$f'(x)=-2$ có 3 nghiệm $x_5;x_6;x_7$ phân biệt.

$f'(x)=-1$ có 3 nghiệm $x_8;x_9;x_{10}$ phân biệt.

$f'(x)=2$ có 1 nghiệm x_{11}.

Vậy hàm số $g(x)=2019f(f'(x))+2020$ có 11 điểm cực trị.

Câu 30. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$, $B(5;4;4)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-z+6=0$ Nếu M thay đổi thuộc (P) thì giá trị nhỏ nhất của MA^2+MB^2 là

A. 60. **B.** 50. **C.** $\frac{200}{3}$. **D.** $\frac{2968}{25}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(3;3;3)$ là trung điểm đoạn AB. Ta có $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$.

Do đó MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi $MI\perp(P)$. Khi đó

$MI=d(I,(P))=\frac{|6+3-3+6|}{\sqrt{4+1+1}}=2\sqrt{6}$; $AB=\sqrt{4^2+2^2+2^2}=\sqrt{24}$.

Vậy $\min(MA^2+MB^2)=2(2\sqrt{6})^2+\frac{(\sqrt{24})^2}{2}=60$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=3\left(x+1\right)\left(x-3\right)$ và $f\left(-1\right)=0$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x\right)+\frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 62. **B.** 63. **C.** 64. **D.** 65.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f\left(x\right)+\frac{m}{2}$.

Ta có: $g'(x)=f'\left(x\right)=3\left(x+1\right)\left(x-3\right)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Mặt khác $f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-6x-9\right)\mathrm{d}x=x^3-3x^2-9x+C$

Do $f\left(-1\right)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}C=-5\\f\left(3\right)=-32\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{m}{2}$	$\searrow$	$\frac{m}{2}-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)$ luôn có 2 điểm cực trị.

Vậy hàm số $y=\left|f\left(x\right)+\frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)=f\left(x\right)+\frac{m}{2}$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow g(-1).g(3)<0\Leftrightarrow\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-32\right)<0\Leftrightarrow 0<m<64$.

Vì m là số nguyên nên có 63 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 32. Tìm tất cả các số thực m để phương trình $\left(mx^2+2x-m+1\right)\sqrt{x}=0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\m<0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m>1\\m<0\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\m\le 0\end{array}\right.$. **D.** $0<m<1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có điều kiện: $x\ge 0$.

$$\left(mx^2+2x-m+1\right)\sqrt{x}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}mx^2+2x-m+1=0\quad(1)\\x=0\end{array}\right..$$

Do đó, để phương trình $\left(mx^2+2x-m+1\right)\sqrt{x}=0$ có hai nghiệm phân biệt thì ta có các trường hợp sau:

TH1. Phương trình (1) có một nghiệm bằng 0 và nghiệm còn lại dương.

Do phương trình có một nghiệm bằng 0 nên ta có: $(1) \Leftrightarrow -m+1=0 \Leftrightarrow m=1$.

Thế $m=1$ vào phương trình (1) ta được: $x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2\ (l) \end{array}\right.$.

Vậy trường hợp này không tồn tại m thỏa yêu cầu đề bài.

TH2. Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m(-m+1)<0 \Leftrightarrow 0<m<1$.

TH3. Phương trình (1) có một nghiệm kép dương.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2-m(-m+1)=0 \\ -\dfrac{2}{m}>0 \\ \dfrac{-m+1}{m}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m+1=0 \\ m<0 \\ 0<m<1 \end{cases} \Rightarrow$ không tồn tại m thỏa yêu cầu đề bài trong trường hợp này.

Vậy ta có $0<m<1$ thì thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và $f(1)=-2$. Tính $\int\limits_1^2 f(x)dx$.

A. $-\dfrac{1}{2}-\ln 2$. **B.** $-\dfrac{3}{2}-\ln 2$. **C.** $-1-\dfrac{\ln 2}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}$.

Lời giải

Ta có $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$

$\Leftrightarrow x^2f^2(x)+2xf(x)+1=xf'(x)+f(x)$

$\Leftrightarrow [xf(x)+1]^2=xf'(x)+f(x)$ (1)

Đặt $h(x)=xf(x)+1 \Rightarrow h'(x)=xf'(x)+f(x)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow h^2(x)=h'(x) \Rightarrow \dfrac{h'(x)}{h^2(x)}=1 \Rightarrow \int \dfrac{h'(x)}{h^2(x)}dx=\int dx \Rightarrow -\dfrac{1}{h(x)}=x+C$.

Suy ra $h(x)=-\dfrac{1}{x+C} \Rightarrow xf(x)+1=-\dfrac{1}{x+C}$. (2)

Mà $f(1)=-2$ nên thay vào (2) ta được $C=0$.

Vậy $xf(x)+1=-\dfrac{1}{x} \Rightarrow xf(x)=\dfrac{-x-1}{x} \Rightarrow f(x)=\dfrac{-x-1}{x^2}$.

Do đó $\int\limits_1^2 f(x)dx=\int\limits_1^2 \dfrac{-x-1}{x^2}dx=\int\limits_1^2\left(-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)dx=\left.\left(-\ln|x|+\dfrac{1}{x}\right)\right|_1^2=-\dfrac{1}{2}-\ln 2$.

Câu 34. Cho tập A gồm các số tự nhiên có 2021 chữ số, sao cho trong mỗi số đó chỉ có mặt chữ số 0 hoặc 1. Chọn ngẫu nhiên từ tập A một số. Tính xác suất để số được chọn thỏa mãn số chữ số 1 có mặt là chữ số lẻ.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2^{2019}}$ **C.** $\frac{1}{2^{2020}}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn A

Do tập A gồm các số chỉ có chữ số 0 và 1 nên chữ số hàng lớn nhất của các số thuộc tập A là chữ số 1. Số đó có dạng $\overline{1a_1a_2a_3...a_{2020}}$.

Lập được 2^{2020} số có dạng như trên.

Số được chọn thỏa mãn số chữ số 1 có mặt là chữ số lẻ $\Leftrightarrow$ $\overline{a_1a_2....a_{2020}}$ có chẵn số chữ số 1.

•Không có chữ số 1 ta lập được C_{2020}^{0} số

•Có 2 chữ số 1 ta lập được C_{2020}^{2} số

•Có 4 chữ số 1 ta lập được C_{2020}^{4} số

•Tương tự như thế đến 2020 chữ số ta lập được C_{2020}^{2020} số

Vậy ta lập được $C_{2020}^{0}+C_{2020}^{2}+C_{2020}^{4}+...+C_{2020}^{2020}=\frac{1}{2}.2^{2020}=2^{2019}$ số thỏa mãn.

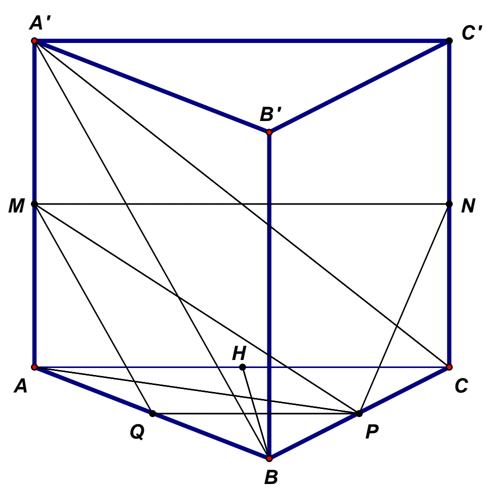
Xác suất cần tìm là $\frac{2^{2019}}{2^{2020}}=\frac{1}{2}$.

Câu 35. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', CC', BC. Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Thể tích phần có chứa đỉnh B' bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{19a^3\sqrt{3}}{48}$. **D.** $\frac{11a^3\sqrt{3}}{48}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} MN // AC \\ MN \subset (MNP) \\ AC \subset (ABC) \\ P \in (MNP)\cap(ABC) \end{cases} \Rightarrow (MNP)\cap(ABC)=PQ \quad (Q\in AB, PQ//AC//MN)$.

Thể tích phần có chứa đỉnh B': $V=V_{ABC.A'B'C'}-V_{MAPQ}-V_{P.CNMA}$.

* $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

* Ta có $S_{\Delta APQ}=\frac{1}{2}S_{\Delta APB}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$

$\Rightarrow V_{MAPQ}=\frac{1}{3}MA.S_{\Delta APQ}=\frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{16}=\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

* $S_{MNCA}=AC.MA=a.a=a^2$.

Ta có $(ABC)\perp(AA'C'C)$. Kẻ $BH\perp AC$

$\Rightarrow BH\perp(AA'C'C)\Rightarrow d(B,(AA'C'C))=BH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$PC=\frac{1}{2}BC\Rightarrow d(P,(AA'C'C))=\frac{1}{2}d(B,(AA'C'C))=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow V_{P.CNMA}=\frac{1}{3}d(P,(AA'C'C)).S_{MNCA}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.a^2=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Vậy $V=V_{ABC.A'B'C'}-V_{MAPQ}-V_{P.CNMA}=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}-\frac{a^3\sqrt{3}}{48}-\frac{a^3\sqrt{3}}{12}=\frac{19a^3\sqrt{3}}{48}$.

B. ĐIỀN KHUYẾT (15 CÂU)

Câu 36. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3-4x+1$ tại điểm có hoành độ bằng 2 có phương trình là

Đáp án: ………….

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-4$

Hoành độ tiếp điểm $x_0=2$ $\Rightarrow$ Tung độ tiếp điểm $y_0=y(2)=1$.

Hệ số góc của tiếp tuyến $k=y'(2)=8$.

Vậy phương trình của tiếp tuyến $y=k(x-x_0)+y_0\Rightarrow y=8(x-2)+1\Leftrightarrow y=8x-15$.

Câu 37. Hàm số $y=-4x^4+3x^2+5$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

Đáp án: ………….

Lời giải

Cách 1:

Ta có: $y'=-16x^4+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}\end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có một điểm cực tiểu là $x=0$.

Cách 2: Do hàm số có hệ số $a.b=-12<0$ nên hàm số có điểm ba cực trị.

Mà hệ số $a=-4<0$ nên hàm số có hai điểm cực đại và điểm một cực tiểu.

Câu 38. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=5$ và mặt phẳng $(P):2x-y-2z-1=0$. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (P) là.

Đáp án: ………….

Lời giải

Tâm của mặt cầu $I(1;0;-1)$.

$d(I,(P))=\frac{|2+2-1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=1$.

Câu 39. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

Đáp án: ………….

Lời giải

Gọi số cần tìm dạng: $\overline{abcd}$, $(a\neq 0)$.

•Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau: $4.A_4^3 = 96$ số.

•Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau chia hết cho 5: $A_4^3 + 3.A_3^2 = 42$.

•Vậy số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau không chia hết cho 5 là: $96 - 42 = 54$ số.

Câu 40. Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1} = -1$. Tính $I = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2+x\right)f(x)+2}{x-1}$

Đáp án: ....

Lời giải

Theo giả thiết: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1} = -1$

Chọn $f(x) = -x$, ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x+1}{x-1} = -1$

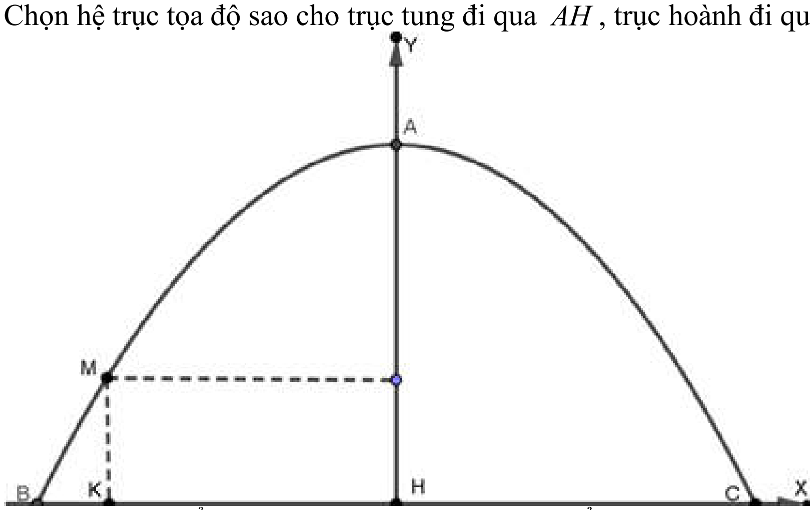
Khi đó $I = \lim\limits_{x\to 1}2\dfrac{(x^2+x)(-x)+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^3-x^2+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(-x^2-x-2) = -5$

Câu 41. Có một cái cổng hình Parabol. Người ta đo khoảng cách giữa hai chân cổng BC là $10\,m$. Từ một điểm M trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là $MK = 18\,m$ và khoảng cách tới chân cổng gần nhất là $BK = 1\,m$. Chiều cao AH của cổng là

Đáp án: ....

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ sao cho trục tung đi qua AH, trục hoành đi qua MH như hình vẽ



Hình dạng cái cổng là một Parabol đi qua các điểm như hình vẽ

Khi đó theo giả thiết các điểm $B(-5;0)$, $C(5;0)$, $H(0;0)$ và $M(-4;18)$

Do Parabol nhận trục tung làm trục đối xứng nên phương trình có dạng: $y = ax^2 + c\,(a \neq 0)$

Parabol đi qua $B(-5;0)$, $C(5;0)$ và $M(-4;18)$ nên ta có hệ $\begin{cases}25a+c=0\\16a+c=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\c=50\end{cases}$

Vậy phương trình Parabol là : $y = -2x^2 + 50$. Khi đó $A(0;50)$ là đỉnh của Parabol

Suy ra chiều cao cái cổng là : $AH = 50\,m$

Câu 42. Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 - m^3x^2 + 2018$ có ba điểm cực trị

Đáp án: ....

Lời giải

Ta có: $y' = 4mx^3 - 2m^3x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4mx^3 - 2m^3x = 0\ \ (*)$.

Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt, suy ra $m \neq 0$.

Câu 43. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^{-x}$; $y=\frac{x}{3}$; $x=0$ là $S=\frac{m}{3\ln 3}-\frac{n}{6}$. Tính tổng $m+n$.

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Xét phương trình $3^{-x}=\frac{x}{3}$ (1), có vế trái là hàm số $y=3^{-x}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$, vế phải là hàm số $y=\frac{x}{3}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên phương trình (1) có tối đa 1 nghiệm.

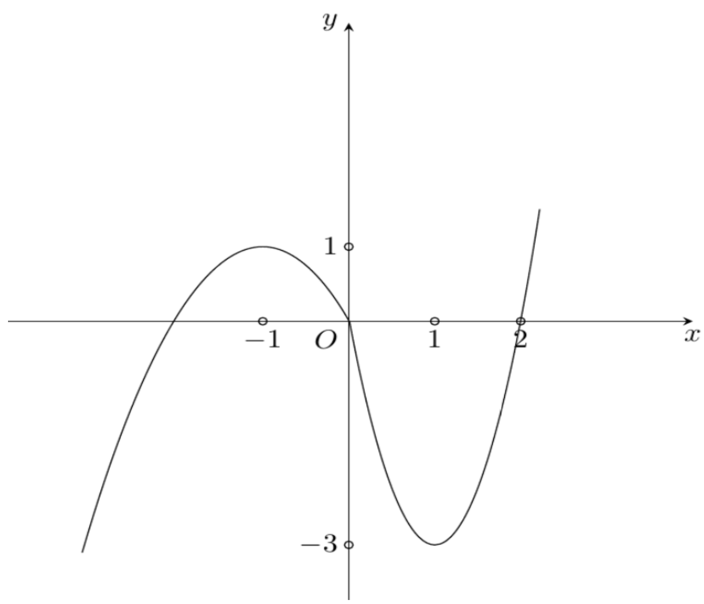
Nhận thấy $x=1$ là một nghiệm của phương trình (1), suy ra $x=1$ là nghiệm duy nhất.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^{-x}$; $y=\frac{x}{3}$; $x=0$, ta có:

$$S=\int_0^1\left|3^{-x}-\frac{x}{3}\right|dx=\left|\int_0^1\left(3^{-x}-\frac{x}{3}\right)dx\right|=\left|\left.\left(\frac{-3^{-x}}{\ln 3}-\frac{x^2}{6}\right)\right|_0^1\right|=\left|\frac{-1}{3\ln 3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{\ln 3}\right|=\left|\frac{2}{3\ln 3}-\frac{1}{6}\right|=\frac{2}{3\ln 3}-\frac{1}{6}$$

Mà $S=\frac{m}{3\ln 3}-\frac{n}{6}$ $\Rightarrow m=2;\ n=1\Rightarrow m+n=3$.

Câu 44. Cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ:



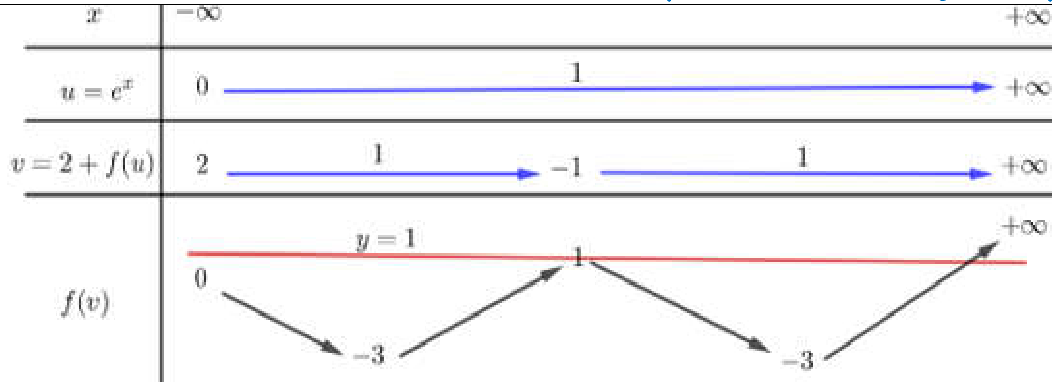
Phương trình $f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt?

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Dựa vào đồ thị đã cho ta thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(-1;1),(1;-3)$.

Từ đó ta có bảng ghép trục sau:



Vậy phương trình $f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 45. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w=(2+3i)\overline{z}+3+4i$ là một đường tròn bán kính R. Tính R.

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1|=5$ là đường tròn (C) tâm $I(1;0)$ và bán kính $R=5$. Ta có (C) nhận trục hoành là trục đối xứng nên tọa độ điểm biểu diễn $\overline{z}$ cũng nằm trên đường tròn này hay $\left|\overline{z}-1\right|=5$.

Ta có

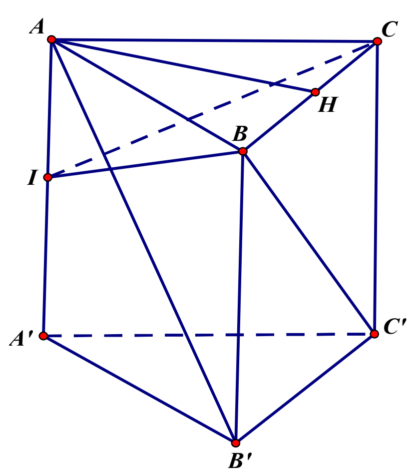
$w=(2+3i)\overline{z}+3+4i \Leftrightarrow w=(2+3i)\left(\overline{z}-1\right)+(2+3i)+3+4i \Leftrightarrow w-(5+7i)=(2+3i)\left(\overline{z}-1\right)$

$\Leftrightarrow \left|w-(5+7i)\right|=\left|(2+3i)\right|\left|\left(\overline{z}-1\right)\right| \Leftrightarrow \left|w-(5+7i)\right|=5\sqrt{13}$.

Câu 46. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC cân đỉnh A, $\widehat{ABC}=\alpha$, BC' tạo đáy góc β. Gọi I là trung điểm của AA', biết $\widehat{BIC}=90^0$. Tính $\tan^2\alpha+\tan^2\beta$

Đáp án: $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Lời giải



Ta có: $\tan\beta=\dfrac{BB'}{B'C'}\cdot\Delta AHB$ vuông tại H (H là trung điểm của BC) $\Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{2AH}{BC}$

$\Rightarrow \tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{4\left(AI^2+AH^2\right)}{BC^2}(*)$

Mà ΔAIH vuông tại A nên $AI^2+AH^2=IH^2$

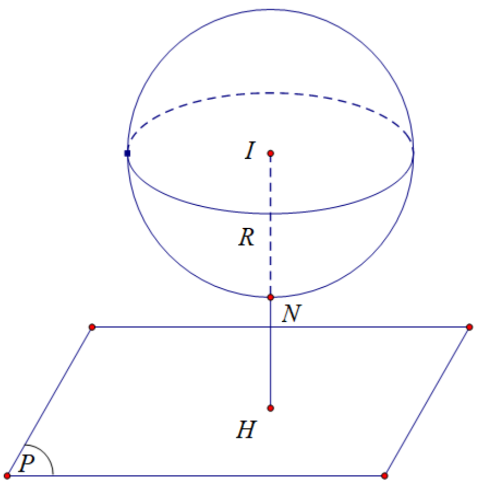
ΔBIC vuông tại $I \Rightarrow IH = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow BC^2 = 4IH^2$. Thay vào $(*)$

Ta có: $\tan^2\alpha + \tan^2\beta = 1$

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x+2y+2z+18=0$, M là điểm di chuyển trên mặt phẳng (P); N là điểm nằm trên tia OM sao cho $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 24$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (P).

Đáp án: ....

Lời giải



Gọi $N(a;b;c)$, ta có: $ON = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Vì M, N, O thẳng hàng và hai vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ cùng hướng nên ta có $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = OM.ON = 24$.

$\Rightarrow OM = \dfrac{24}{ON} = \dfrac{24}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{24}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{ON}$. Mà: $\overrightarrow{ON} = (a;b;c)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \left(\dfrac{24a}{a^2+b^2+c^2}; \dfrac{24b}{a^2+b^2+c^2}; \dfrac{24c}{a^2+b^2+c^2}\right)$.

$\Rightarrow M\left(\dfrac{24a}{a^2+b^2+c^2}; \dfrac{24b}{a^2+b^2+c^2}; \dfrac{24c}{a^2+b^2+c^2}\right)$.

Mặt khác: $M \in (P) \Rightarrow 24\left[\dfrac{a}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{2b}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{2c}{a^2+b^2+c^2}\right] + 18 = 0$.

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 + \dfrac{4a}{3} + \dfrac{8b}{3} + \dfrac{8c}{3} = 0$.

Vậy điểm N thuộc mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+\dfrac{4x}{3}+\dfrac{8y}{3}+\dfrac{8z}{3} = 0$,

(S) có tâm $I\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{4}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$, bán kính $R = 2$.

Ta lại có: $d(I,(P)) = \dfrac{\left|-\dfrac{2}{3} + 2.\left(-\dfrac{4}{3}\right) + 2.\left(-\dfrac{4}{3}\right) + 18\right|}{\sqrt{1+4+4}} = 4$.

$\Rightarrow \min d(N,(P)) = d(I,(P)) - R = 4 - 2 = 2$.

Câu 48. Cho các số thức x, y với $x \ge 0$ thỏa mãn $e^{x+3y} + e^{xy+1} + x(y+1) + 1 = e^{-xy-1} + \dfrac{1}{e^{x+3y}} - 3y$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + 2y + 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Đáp án: ....

Lời giải

Ta có: $e^{x+3y}+e^{xy+1}+x(y+1)+1=e^{-xy-1}+\frac{1}{e^{x+3y}}-3y$

$\Leftrightarrow e^{x+3y}-\frac{1}{e^{x+3y}}+x+3y=e^{-xy-1}+\frac{1}{e^{-xy-1}}-xy-1(1)$

Xét hàm số $f(t)=e^{t}-\frac{1}{e^{t}}+t$ ta có $f'(t)=e^{t}+\frac{1}{e^{t}}+1>0,\forall t$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ luôn liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó, $(1)\Leftrightarrow f(x+3y)=f(-xy-1)\Leftrightarrow y(x+3)=-(x+1)$

$\Rightarrow T=x+2y+1=x-2\frac{x+1}{x+3}+1=x-1+\frac{4}{x+3}$

Ta chứng minh $T\geq\frac{1}{3},\forall x\geq 0$:

Xét $g(x)=x-1+\frac{4}{x+3},(x\geq 0)$

$\Rightarrow g'(x)=1-\frac{4}{(x+3)^{2}}=\frac{x^{2}+6x+5}{(x+3)^{2}}>0,x>0$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

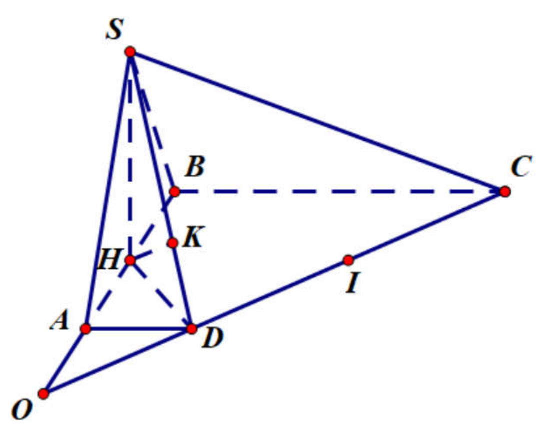
$\Rightarrow \min\limits_{[0;+\infty)} g(x)=g(0)=\frac{1}{3}$.

Vậy GTNN của T là $\frac{1}{3}$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AD=a$, $AB=2a, BC=3a$, mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

Đáp án: ....

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB

Suy ra $SH\perp AB$

Mà $(SAB)\perp(ABCD)$ và $(SAB)\cap(ABCD)=AB$

Do đó $SH\perp(ABCD)$

Gọi O là giao điểm của AB và CD.

Mặt khác $\dfrac{d(A;(SCD))}{d(H;(SCD))}=\dfrac{OA}{OH}=\dfrac{AD}{HI}=\dfrac{AD}{\dfrac{AD+BC}{2}}=\dfrac{a}{2a}=\dfrac{1}{2}$

Suy ra $d(A;(SCD))=\dfrac{1}{2}d(H;(SCD))$

Ta thấy $HD=a\sqrt{2};HC=a\sqrt{10};CD=2\sqrt{2}a$ nên ΔHDC vuông tại D $\Rightarrow CD\perp(SHD)$ $\Rightarrow(SCD)\perp(SHD)$

Kẻ $HK\perp SD$ $\Rightarrow d(H;(SCD))=HK$

Xét ΔSHD vuông tại H, ta có:

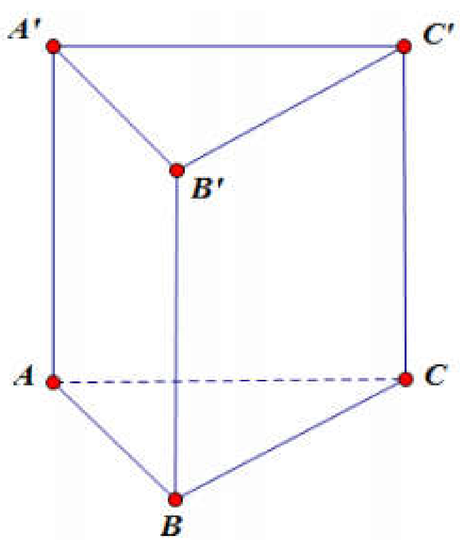
$\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{HD^2}+\dfrac{1}{SH^2}=\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1}{3a^2}=\dfrac{5}{6a^2}$

$d(A;(SCD))=\dfrac{1}{2}d(H;(SCD))=\dfrac{HK}{2}=\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$

Câu 50. Một người cần làm một cái lăng kính hình lăng trụ tam giác đều từ tấm mica để có thể tích là $6\sqrt{3}\text{ cm}^3$. Để ít hao tốn vật liệu nhất thì cần tính độ dài các cạnh của khối lăng trụ tam giác đều này bằng bao nhiêu?

Đáp án: …………..

Lời giải



Giả sử độ dài $AC=x;AA'=h$.

Khi đó $S_{ABC}=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$ và $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{ABC}=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}h$.

Theo giả thiết $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}h=6\sqrt{3}\Rightarrow h=\dfrac{24}{x^2}$.

Diện tích toàn phần của khối lăng trụ là $S_{tp}=2S_{ABC}+3S_{ABB'A'}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+3hx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+\dfrac{72}{x}$.

Khảo sát $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+\dfrac{72}{x}$ trên $x\in(0;+\infty)$, ta được $\min f(x)$ tại $x=2\sqrt{3}\Rightarrow h=2$.