



Bài 1. (1,5 điểm) Cho hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ có đồ thị hàm số là Parabol (P).

- Vẽ đồ thị (P) của hàm số trên.
- Tìm điểm A thuộc (P) sao cho hoành độ gấp hai lần tung độ.

Bài 2. (1,0 điểm) Cho phương trình: $3x^2 - 14x - 1 = 0$.

- Chứng tỏ phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.
- Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình trên. Không giải phương trình, hãy tính giá trị

của biểu thức: $A = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1}$.

Bài 3. (1,5 điểm) Tổng kết cuối năm học 2024 - 2025, mỗi học sinh lớp 8A được đánh giá ở hai mặt (kết quả rèn luyện và kết quả học tập đều được đánh giá ở các mức từ cao đến thấp là mức Tốt, mức Khá, mức Đạt, mức Chưa đạt). Cho bảng thống kê đánh giá cuối năm học 2024 - 2025 của lớp 8A như sau:

Xếp loại học tập	Mức Tốt	Mức Khá	Mức Đạt	Mức Chưa đạt
Kết quả rèn luyện	36	4	0	0
Kết quả học tập	20	15	5	0

- Lớp 8A có tất cả bao nhiêu học sinh?
- Tính tỉ lệ phần trăm học sinh có kết quả học tập ở mức Tốt so với cả lớp?
- Theo quy định:

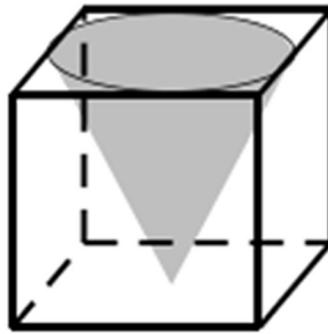
- Để được **khen thưởng** cuối năm học thì cuối năm học sinh phải có kết quả rèn luyện được đánh giá ở mức Tốt và kết quả học tập cũng được đánh giá ở mức Tốt.
- Để được **lên lớp** thì cuối năm học sinh phải có kết quả rèn luyện được đánh giá từ mức Đạt trở lên và kết quả học tập cũng được đánh giá từ mức Đạt trở lên.

Biết rằng, cuối năm học 2024 - 2025 tất cả học sinh của lớp 8A đều được lên lớp và có 18 học sinh được khen thưởng, tất cả học sinh có kết quả học tập mức Đạt đều được đánh giá rèn luyện ở mức Tốt. Để chọn ra 1 học sinh bất kì của lớp 8A, tính xác suất để học sinh được chọn có kết quả đánh giá cuối năm là kết quả rèn luyện ở mức Tốt và kết quả học tập ở mức Khá.

Bài 4. (1,0 điểm) Bạn Nam mang theo 200000 đồng vào nhà sách mua đồ dùng học tập. Nhà sách đang có chương trình khuyến mãi giảm giá 10% so với giá niêm yết cho toàn bộ các mặt hàng. Biết giá niêm yết của cây viết 5000 đồng/cây, tập 10000 đồng/cuốn, thước 6000 đồng/cây. Bạn Nam mua x cây viết, 6 quyển tập, 4 cây thước. Gọi y (đồng) là số tiền còn lại của bạn Nam sau khi thanh toán cho nhà sách.

- Hãy biểu diễn y theo x (rút gọn biểu thức).
- Hỏi bạn Nam có thể mua được nhiều nhất bao nhiêu cây viết?

Bài 5. (1,0 điểm) Một khối lập phương rỗng bên trong có cạnh là $1m$. Đặt vào trong khối đó một khối nón đặc có đỉnh trùng với tâm một mặt của lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện (xem hình vẽ). Sau đó anh Nam đổ nước vào khoảng còn trống giữa hai khối đó. Hỏi Anh Nam đổ bao nhiêu lít nước thì nước đầy khối lập phương (*kết quả tính theo đơn vị lít, làm tròn đến hàng đơn vị*). Thể tích hình lập là $V = a^3$ (a là độ dài cạnh), thể tích hình nón $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$ (R là bán kính đáy, h là chiều cao của hình nón)



Bài 6. (1,0 điểm) Điểm trung bình của 100 học sinh trong hai lớp 9A và 9B là 7,608. Tính điểm trung bình của các học sinh mỗi lớp, biết rằng số học sinh của lớp 9A hơn lớp 9B là 2 học sinh và điểm trung bình của học sinh lớp 9B bằng $\frac{9}{10}$ điểm trung bình của học sinh lớp 9A.

Bài 7. (3,0 điểm) Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ các đường cao AD, BE, CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H . Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại R .

- Chứng minh: Tứ giác $CEHD$ và tứ giác $BCEF$ nội tiếp.
- Chứng minh: $AE.AC = AH.AD$ và $AE.BC = AH.BE$
- Chứng minh: H và R đối xứng nhau qua BC và xác định tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.

=== ★ ★ ★ ===



HƯỚNG DẪN GIẢI

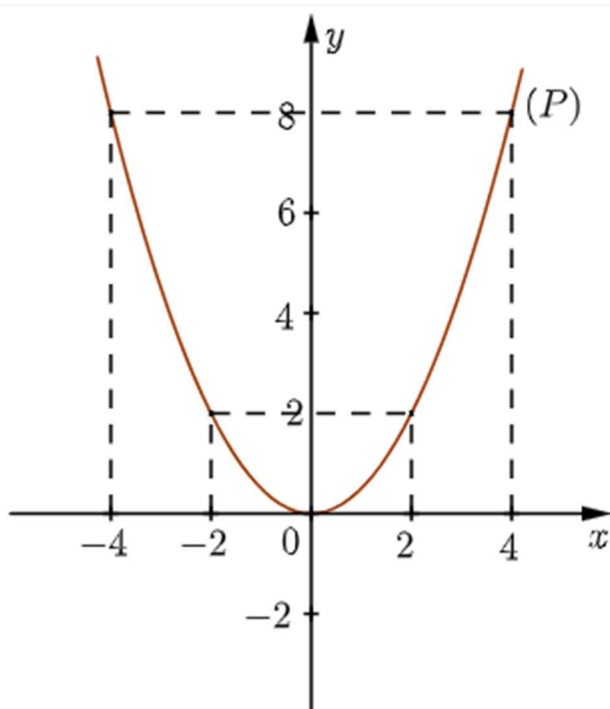
Câu 1. (1,5 điểm) Cho hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ có đồ thị hàm số là Parabol (P) .

- a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số trên.
b) Tìm điểm A thuộc (P) sao cho hoành độ gấp hai lần tung độ.

Lời giải

a) BGT:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{x^2}{2}$	8	2	0	2	8



b) Điểm A thuộc (P) có hoành độ gấp hai lần tung độ nên có phương trình

$$x = 2y$$

$$x = 2 \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Vậy tọa độ điểm A cần tìm là $(0;0); \left(1; \frac{1}{2}\right)$.



Câu 2. (1,0 điểm) Cho phương trình: $3x^2 - 14x - 1 = 0$.

a) Chứng tỏ phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên. Không giải phương trình, hãy tính giá trị

của biểu thức: $A = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1}$.

Lời giải

a) $3x^2 - 14x - 1 = 0$ ($a = 3; b = -14; c = -1$)

Vì $\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4.3.(-1) = 208 > 0$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b) Theo định lý Viète, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-14)}{3} = \frac{14}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

Ta có: $A = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1}$

$$A = \frac{x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1)}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)}$$

$$A = \frac{x_1^2 - x_1 + x_2^2 - x_2}{x_2x_1 - x_1 - x_2 + 1}$$

$$A = \frac{(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1}$$

$$A = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - (x_1 + x_2)}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1}$$

$$A = \frac{\left(\frac{14}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{-1}{3}\right) - \left(\frac{14}{3}\right)}{\left(\frac{-1}{3}\right) - \left(\frac{14}{3}\right) + 1} = -\frac{40}{9}$$

Câu 3. (1,5 điểm) Tổng kết cuối năm học 2024 – 2025, mỗi học sinh lớp 8A được đánh giá ở hai mặt (kết quả rèn luyện và kết quả học tập đều được đánh giá ở các mức từ cao đến thấp là mức Tốt, mức Khá, mức Đạt, mức Chưa đạt). Cho bảng thống kê đánh giá cuối năm học 2024 – 2025 của lớp 8A như sau:

Xếp loại học tập	Mức tốt	Mức khá	Mức đạt	Mức chưa đạt
Kết quả rèn luyện	36	4	0	0
Kết quả học tập	20	15	5	0

a) Lớp 8A có tất cả bao nhiêu học sinh?

b) Tính tỉ lệ phần trăm học sinh có kết quả học tập ở mức Tốt so với cả lớp?

c) Theo quy định:

- ♦ Để được **khen thưởng** cuối năm học thì cuối năm học sinh phải có kết quả rèn luyện được đánh giá ở mức Tốt và kết quả học tập cũng được đánh giá ở mức Tốt.



♦ Để được lên lớp thì cuối năm học sinh phải có kết quả rèn luyện được đánh giá từ mức Đạt trở lên và kết quả học tập cũng được đánh giá từ mức Đạt trở lên.

Biết rằng, cuối năm học 2024 – 2025 tất cả học sinh của lớp 8A đều được lên lớp và có 18 học sinh được khen thưởng, tất cả học sinh có kết quả học tập mức Đạt đều được đánh giá rèn luyện ở mức Tốt. Để chọn ra 1 học sinh bất kì của lớp 8A, tính xác suất để học sinh được chọn có kết quả đánh giá cuối năm là kết quả rèn luyện ở mức Tốt và kết quả học tập ở mức Khá.

Lời giải

a) Số học sinh lớp 8A có là: $36 + 4 + 0 + 0 = 40$ (học sinh).

b) Tỷ lệ phần trăm học sinh có kết quả học tập Tốt so với cả lớp là: $\frac{20}{40} \cdot 100\% = 50\%$

c) Vì lớp 8A có 20 học sinh có kết quả học tập là Tốt, tuy nhiên chỉ 18 học sinh được khen thưởng nên sẽ có $20 - 18 = 2$ học sinh không được kết quả rèn luyện mức Tốt, mà có kết quả rèn luyện mức Khá (Vì lớp không có kết quả rèn luyện mức Đạt và mức Chưa đạt).

Số học sinh có kết quả học tập mức Khá và hạnh kiểm Tốt là $36 - 18 - 5 = 13$.

Suy ra có 13 kết quả thuận lợi của biến cố “để học sinh được chọn có kết quả đánh giá cuối năm là kết quả rèn luyện ở mức Tốt và kết quả học tập ở mức Khá”.

Vậy xác suất cần tìm của biến cố trên là $\frac{13}{40}$.

Câu 4. (1,0 điểm) Bạn Nam mang theo 200000 đồng vào nhà sách mua đồ dùng học tập. Nhà sách đang có chương trình khuyến mãi giảm giá 10% so với giá niêm yết cho toàn bộ các mặt hàng. Biết giá niêm yết của cây viết 5000 đồng/cây, tập 10000 đồng/cuốn, thước 6000 đồng/cây. Bạn Nam mua x cây viết, 6 quyển tập, 4 cây thước. Gọi y (đồng) là số tiền còn lại của bạn Nam sau khi thanh toán cho nhà sách.

a) Hãy biểu diễn y theo x (rút gọn biểu thức).

b) Hỏi bạn Nam có thể mua được nhiều nhất bao nhiêu cây viết?

Lời giải

a) Số tiền của 1 cây viết sau khi giảm giá 10% là: $5000 \cdot 90\% = 4500$ (đồng)

Số tiền của 1 quyển tập sau khi giảm giá 10% là: $10000 \cdot 90\% = 9000$ (đồng)

Số tiền của 1 cây thước sau khi giảm giá 10% là: $6000 \cdot 90\% = 5400$ (đồng)

Hàm số biểu diễn y theo x là:

$$y = 200000 - (4500x + 9000 \cdot 6 + 5400 \cdot 4)$$

$$y = 200000 - (4500x + 75600)$$

$$y = 124400 - 4500x$$

b) Để số cây viết mua được nhiều nhất thì số tiền còn lại phải ít nhất, ta có phương trình:

$$124400 - 4500x = 0$$

$$x = 27,644...$$

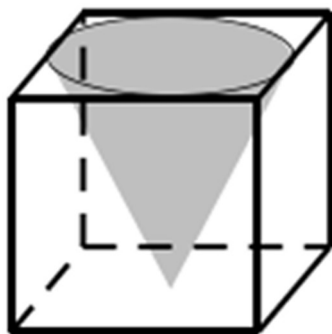
Vì số cây viết mua là số nguyên dương nên ta mua được nhiều nhất 27 cây.



Câu 5. (1,0 điểm) Một khối lập phương rỗng bên trong có cạnh là $1m$. Đặt vào trong khối đó một khối nón đặc có đỉnh trùng với tâm một mặt của lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện (xem hình vẽ). Sau đó anh Nam đổ nước vào khoảng còn trống giữa hai khối đó. Hỏi Anh Nam đổ bao nhiêu lít nước thì nước đầy khối lập phương (*kết quả tính theo đơn vị lít, làm tròn đến hàng đơn vị*). Thể tích hình lập là $V = a^3$ (a là độ dài cạnh), thể tích hình nón $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$ (R là bán kính đáy, h là chiều cao của hình nón)

Lời giải

Bán kính của khối nón là: $R = 1 : 2 = 0,5(m)$



Thể tích của khối hình lập phương là: $V = a^3 = 1^3 = 1(m^3)$

Thể tích của khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot (0,5)^2 \cdot 1 = \frac{1}{12}\pi(m^3)$

Thể tích nước cần đổ vào để đầy khối lập phương là: $1 - \frac{1}{12}\pi = 0,7382...(m^3) \approx 738(l)$

Vậy cần đổ thêm khoảng 738 lít nước nữa thì đầy khối lập phương.

Câu 6. (1,0 điểm) Điểm trung bình của 100 học sinh trong hai lớp 9A và 9B là 7,608. Tính điểm trung bình của các học sinh mỗi lớp, biết rằng số học sinh của lớp 9A hơn lớp 9B là 2 học sinh và điểm trung bình của học sinh lớp 9B bằng $\frac{9}{10}$ điểm trung bình của học sinh lớp 9A.

Lời giải

Gọi x là số học sinh lớp 9A ($x \in \mathbb{N}^*$)

y là số học sinh lớp 9B ($y \in \mathbb{N}^*$)

Vì lớp có 100 học sinh trong hai lớp 9A và 9B nên có phương trình: $x + y = 100$ (1)

Vì lớp 9A hơn lớp 9B là 2 học sinh nên có phương trình: $x - y = 2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 100 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được: $x = 51$ (nhận) và $y = 49$ (nhận)

Gọi a là số học sinh lớp 9A ($a > 0$)

b là số học sinh lớp 9B ($b > 0$)

Vì điểm trung bình của 100 học sinh trong hai lớp 9A và 9B là 7,608 nên ta có phương trình:

$$51a + 49b = 7,608 \cdot 100 \Rightarrow 51a + 49b = 760,8 \quad (3)$$



Vì điểm trung bình của học sinh lớp 9B bằng $\frac{9}{10}$ điểm trung bình của học sinh lớp 9A nên có phương

$$\text{trình: } b = \frac{9}{10}a \Rightarrow \frac{9}{10}a - b = 0 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 51a + 49b = 760,8 \\ \frac{9}{10}a - b = 0 \end{cases}$$

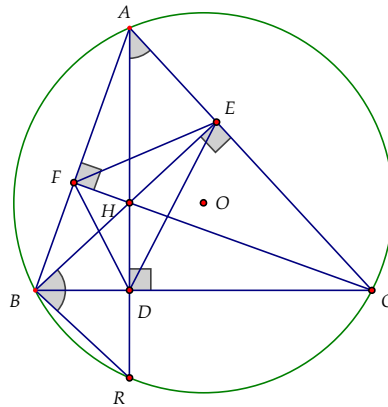
Giải hệ phương trình trên, ta được: $a = 8$ (nhận) và $b = 7,2$ (nhận)

Vậy điểm trung bình của lớp 9A là 8 điểm và của lớp 9B là 7,2 điểm.

Câu 7. (3,0 điểm) Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ các đường cao AD, BE, CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H . Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại R .

- Chứng minh: Tứ giác $CEHD$ và tứ giác $BCEF$ nội tiếp.
- Chứng minh: $AE.AC = AH.AD$ và $AE.BC = AH.BE$
- Chứng minh: H và R đối xứng nhau qua BC và xác định tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$

Lời giải



- a) Ta có: $\triangle CEH$ vuông tại E (BE là đường cao)

$$\Rightarrow \triangle CEH \text{ nội tiếp đường tròn, đường kính } CH \quad (1)$$

Ta có: $\triangle CDH$ vuông tại D (AD là đường cao)

$$\Rightarrow \triangle CDH \text{ nội tiếp đường tròn, đường kính } CH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được 4 điểm C, E, H, D cùng thuộc đường tròn, đường kính CH .

Vậy tứ giác $CEHD$ nội tiếp.

Ta có: $\triangle BCE$ vuông tại E (BE là đường cao)

$$\Rightarrow \triangle BCE \text{ nội tiếp đường tròn, đường kính } BC \quad (3)$$

Ta có: $\triangle BCF$ vuông tại F (CF là đường cao)

$$\Rightarrow \triangle BCF \text{ nội tiếp đường tròn, đường kính } BC \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta được 4 điểm B, C, E, F cùng thuộc đường tròn, đường kính BC .

Vậy tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

- b) Xét $\triangle AEH$ và $\triangle ADC$ có:

$\hat{A}$ là góc chung



$$\widehat{AEH} = \widehat{ADC} (= 90^\circ)$$

Suy ra $\triangle AEH \sim \triangle ADC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AH} = \frac{AD}{AC} \text{ hay } AE.AC = AH.AD$$

Xét $\triangle BEC$ và $\triangle ADC$ có:

$\widehat{C}$ là góc chung

$$\widehat{BEC} = \widehat{ADC} (= 90^\circ)$$

Suy ra $\triangle BEC \sim \triangle ADC$ (g.g)

Mà $\triangle AEH \sim \triangle ADC$ (cmt)

Vậy $\triangle BEC \sim \triangle AEH$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AH} = \frac{BE}{AE} \text{ hay } AE.BC = AH.BE$$

c) Ta có $\widehat{HBD} = \widehat{RAC}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$) và $\widehat{RAC} = \widehat{RBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{RC}$)
 $\Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{RBD}$

Xét $\triangle HBD$ vuông tại D và $\triangle RBD$ vuông tại D có:

BD là cạnh chung

$$\widehat{HBD} = \widehat{RBD} \text{ (cmt)}$$

Suy ra $\triangle HBD \sim \triangle RBD$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề)

$$\Rightarrow HD = RD \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

Mà $HR \perp BC$ (gt)

Vậy H và R đối xứng nhau qua BC .

Ta có: $\triangle BFH$ vuông tại F (CF là đường cao)

$$\Rightarrow \triangle BFH \text{ nội tiếp đường tròn, đường kính } BH \quad (5)$$

Ta có: $\triangle BDH$ vuông tại D (AD là đường cao)

$$\Rightarrow \triangle BDH \text{ nội tiếp đường tròn, đường kính } BH \quad (6)$$

Từ (5) và (6) ta được 4 điểm B, F, H, D cùng thuộc đường tròn, đường kính BH .

Vậy tứ giác $BFHD$ nội tiếp.

Tương tự: chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp

$$\text{Xét tứ giác } BFHD \text{ nội tiếp có } \widehat{FDH} = \widehat{FBH} \left(= \frac{1}{2} Sd \widehat{FH} \right)$$

$$\text{Xét tứ giác } ABDE \text{ nội tiếp có } \widehat{EDH} = \widehat{EBH} \left(= \frac{1}{2} Sd \widehat{AE} \right)$$

$$\text{Suy ra } \widehat{FDH} = \widehat{EDH}$$

$\Rightarrow DH$ là đường phân giác của $\triangle DEF$

Chứng minh tương tự, ta có FH, EH là đường phân giác của $\triangle DEF$

Vậy H là tâm của đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.